

## ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА, ОПТИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

## ВИХРЕВЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПУЧКИ ХАНКЕЛЯ С КРУГОВОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>, М.А. Волинов<sup>2</sup><sup>1</sup> Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия,<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия

## Аннотация

Рассмотрены векторные пучки Ханкеля с круговой поляризацией. Эти пучки являются обобщением сферической волны, в которую внедрен оптический вихрь. Получены явные аналитические выражения для всех шести проекций электрического и магнитного векторов напряженности электромагнитного поля. Эти выражения точно удовлетворяют системе уравнений Максвелла. Показано отличие в характере распространения в пространстве для пучков Ханкеля с левой и правой круговыми поляризациями. Получены также выражения в дальней зоне дифракции для проекций векторов Умова–Пойнтинга и углового момента.

**Ключевые слова:** оптический вихрь, пучок Ханкеля, круговая поляризация, уравнения Максвелла, орбитальный угловой момент.

**Цитирование:** Котляр, В.В. Вихревые векторные пучки Ханкеля с круговой поляризацией / В.В. Котляр, А.А. Ковалев, М.А. Волинов // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40, № 6. – С. 765-771. – DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-6-765-771.

## Введение

Векторных лазерных пучков, которые удовлетворяют уравнениям Максвелла и для которых получены явные аналитические выражения для проекций электрического и магнитного векторов, известно не много. Наиболее известные из этих пучков – это пучки Бесселя. В [1] рассмотрен симметричный пучок Бесселя нулевого порядка, для которого получены выражения для всех 6 проекций электрического и магнитного векторов в каждой точке пространства. В [2–5] получены проекции электрического и магнитного векторов не для самого пучка Бесселя, а для его ТЕ- и ТМ-модовых состояний. Выражения для векторного пучка Бесселя произвольного порядка с линейной и круговой поляризациями получены в [6]. В [6] векторный пучок Бесселя получен методом потенциалов Герца. Недавно авторы этой статьи рассмотрели еще один (наряду с пучком Бесселя) векторный пучок, который поддается полному аналитическому описанию. Были рассмотрены непараксиальные скалярные [7] и векторные [8, 9] пучки Ханкеля с линейной поляризацией. Эти пучки были получены методом разложения по плоским волнам [10]. Известны также векторные цилиндрические пучки с радиальной или азимутальной поляризациями [11]. Однако замкнутых выражений для проекций электрического и магнитного векторов для таких пучков не получено, а получены лишь формулы для расчёта с помощью интегралов. Цилиндрические пучки анализируются с помощью формул Ричардса–Вольфа и используются для острой фокусировки света [12]. При острой фокусировке лазерного пучка, например, для оптического захвата и вращения микрочастиц, нельзя заранее знать распределение поля в фокусе, а значит, и действия силы и момента силы со стороны света на помещенную в фокус микрочастицу. Действительно, те же пучки Лагерра–Гаусса, которые используются для вращения микрочастиц, являются параксиальными и

не удовлетворяют уравнениям Максвелла. Распределение такого поля в фокусе линзы с высокой числовой апертурой не имеет аналитического выражения.

Явные формулы для проекций электрического и магнитного векторов лазерного пучка позволяют получать аналитические выражения для векторов Пойнтинга и углового момента светового поля [13, 14, 6, 9].

В этой работе авторы расширяют результаты, полученные в [9]: получены явные выражения для проекций электрического и магнитного векторов пучков Ханкеля с правой и левой круговой поляризацией. Из полученных выражений можно сделать вывод, что для пучка Ханкеля с топологическим зарядом  $n$  амплитуда продольных составляющих электрического и магнитного поля имеет топологический заряд  $n + 1$  для правой и  $n - 1$  для левой круговой поляризации.

## 1. Проекция векторов электромагнитного поля для правой и левой круговой поляризации

Известно, что если некоторая функция цилиндрических координат  $P(r, \varphi, z)$  является точным решением уравнения Гельмгольца, т.е.  $\nabla^2 P + k^2 P = 0$ , то её производная по продольной координате  $\partial P / \partial z$  также является решением этого уравнения. Тогда, если поперечные составляющие электрической напряжённости описываются функцией  $\partial P / \partial z$ , т.е.  $E_x = \alpha_x \partial P / \partial z$  и  $E_y = \alpha_y \partial P / \partial z$ , где  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  – произвольные постоянные, то остальные составляющие могут быть легко найдены с помощью уравнений Максвелла:

$$E_z = -\alpha_x \frac{\partial P}{\partial x} - \alpha_y \frac{\partial P}{\partial y},$$

$$\mathbf{H} = \frac{i}{k\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

В [8, 9] этим методом были рассмотрены непараксиальные векторные пучки Ханкеля с линейной поляризацией ( $\alpha_x = 1$ ,  $\alpha_y = 0$ , а функция  $P$  совпадает с опи-

санной ниже составляющей  $E_x$  в выражении (1)). Были получены явные аналитические выражения для всех проекций электрической и магнитной напряжённости (формулы (17)–(21) в [8]). Аналогично методу расчета, изложенному в [8, 9], можно найти все проекции электрического  $\mathbf{E}=(E_x, E_y, E_z)$  и магнитного  $\mathbf{H}=(H_x, H_y, H_z)$  векторов пучка Ханкеля с правой  $E_x + iE_y$  и левой  $E_x - iE_y$  круговой поляризацией. Будем обозначать амплитуды проекций электрического и магнитного векторов верхними индексами + и – для обозначения правой и левой круговой поляризации. Тогда для пучка Ханкеля с правой поляризацией получим ( $n \geq 0$ ):

$$E_{ny}^+(r, \varphi, z) = iE_{nx}^-(r, \varphi, z) = i^n \pi \lambda^{1/2} z (re^{i\varphi})^n \Psi_{n+3/2}(R), \quad (1)$$

где

$$\Psi_{n+\nu}(R) = \frac{H_{n+\nu}^{(1)}(kR)}{R^{n+\nu}}, \quad R = (z^2 + r^2)^{1/2}, \quad (2)$$

$$E_{nz}^+(r, \varphi, z) = \frac{-i}{k} \left( i \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( i^{n-1} \pi \lambda^{1/2} z (re^{i\varphi})^n \Psi_{n+1/2}(R) \right) = \quad (3)$$

$$= i^{n+1} \pi \lambda^{1/2} (re^{i\varphi})^{n+1} \Psi_{n+3/2}(R),$$

$$H_{nx}^+(r, \varphi, z) = \frac{i}{k\mu} \left( \frac{\partial E_z^+}{\partial y} - i \frac{\partial E_x^+}{\partial z} \right) = \frac{i^{n-1} \lambda^{3/2}}{2\mu} (re^{i\varphi})^n \left[ (n+2) \Psi_{n+3/2}(R) - \right. \quad (4)$$

$$\left. - k(z^2 - ir^2 e^{i\varphi} \sin \varphi) \Psi_{n+5/2}(R) \right],$$

$$H_{ny}^+(r, \varphi, z) = \frac{i}{k\mu} \left( -\frac{\partial E_z^+}{\partial x} + \frac{\partial E_x^+}{\partial z} \right) = \frac{i^n \lambda^{3/2}}{2\mu} (re^{i\varphi})^n \left[ (n+2) \Psi_{n+3/2}(R) - \right. \quad (5)$$

$$\left. - k(z^2 + r^2 e^{i\varphi} \cos \varphi) \Psi_{n+5/2}(R) \right],$$

$$H_{nz}^+(r, \varphi, z) = \frac{i}{k\mu} \left( i \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( i^{n-1} \pi \lambda^{1/2} z (re^{i\varphi})^n \Psi_{n+3/2}(R) \right) = \quad (6)$$

$$= \frac{i^{n-1} \pi \lambda^{1/2} z}{\mu} (re^{i\varphi})^{n+1} \Psi_{n+5/2}(R).$$

Для пучка Ханкеля с левой поляризацией получим:

$$E_{ny}^-(r, \varphi, z) = -iE_{nx}^-(r, \varphi, z) = -i^n \pi \lambda^{1/2} z (re^{i\varphi})^n \Psi_{n+3/2}(R), \quad (7)$$

$$E_{nz}^-(r, \varphi, z) = \frac{-i}{k} \left( i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( i^{n-1} \pi \lambda^{1/2} z (re^{i\varphi})^n \Psi_{n+1/2}(R) \right) = \quad (8)$$

$$= i^{n-1} \lambda^{3/2} (re^{i\varphi})^{n-1} \left[ n \Psi_{n+1/2}(R) - \frac{kr^2}{2} \Psi_{n+3/2}(R) \right],$$

$$H_{nx}^-(r, \varphi, z) = \frac{i}{k\mu} \left( \frac{\partial E_z^-}{\partial y} + i \frac{\partial E_x^-}{\partial z} \right) = \frac{i^{n+1} \lambda^{3/2}}{2\mu} (re^{i\varphi})^n \left\{ \frac{2n(n-1)e^{-2i\varphi}}{kr^2} \Psi_{n+1/2}(R) - \right. \quad (9)$$

$$\left. - (2ne^{-2i\varphi} - n - 2) \Psi_{n+3/2}(R) - k(z^2 + ir^2 e^{-i\varphi} \sin \varphi) \Psi_{n+5/2}(R) \right\},$$

$$H_{ny}^-(r, \varphi, z) = \frac{i}{k\mu} \left( -\frac{\partial E_z^-}{\partial x} + \frac{\partial E_x^-}{\partial z} \right) = \frac{i^n \lambda^{3/2}}{2\mu} (re^{i\varphi})^n \left\{ -\frac{2n(n-1)e^{-2i\varphi}}{kr^2} \Psi_{n+1/2}(R) + \right. \quad (10)$$

$$\left. + (2ne^{-2i\varphi} + n + 2) \Psi_{n+3/2}(R) - k(z^2 + r^2 e^{-i\varphi} \cos \varphi) \Psi_{n+5/2}(R) \right\},$$

$$H_{nz}^-(r, \varphi, z) = \frac{-i}{k\mu} \left( i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \left[ i^{n-1} \pi \lambda^{1/2} z (re^{i\varphi})^n \Psi_{n+3/2}(R) \right] = \quad (11)$$

$$= \frac{i^{n-1} \lambda^{3/2} z}{\mu} (re^{i\varphi})^{n-1} \left[ n \Psi_{n+3/2}(R) - \frac{kr^2}{2} \Psi_{n+5/2}(R) \right].$$

Из сравнения (1)–(6) и (7)–(11) видно, что правая круговая поляризация при положительном топологическом заряде увеличивает на единицу этот заряд у амплитуд продольных проекций электрического  $E_{nz}^+$  и магнитного  $H_{nz}^+$  векторов, и, наоборот, левая круговая поляризация уменьшает на единицу топологический заряд оптического вихря  $n$  у амплитуд продольных проекций электрического  $E_{nz}^-$  и магнитного  $H_{nz}^-$  векторов. У остальных проекций топологический заряд не изменяется и остается равным  $n$ . Это приводит к тому, что при отсутствии оптического вихря ( $n=0$ ) продольные компоненты пучка Ханкеля с левой и правой поляризациями представляют собой оптические вихри с топологическими зарядами, равными 1:

$$E_{0z}^\pm(r, \varphi, z) = i\pi \lambda^{1/2} z re^{\pm i\varphi} \Psi_{3/2}(R), \quad (12)$$

$$H_{0z}^\pm(r, \varphi, z) = \mp \frac{i\pi \lambda^{1/2} z}{\mu} re^{\pm i\varphi} \Psi_{5/2}(R) \quad (13)$$

и на оптической оси ( $r=0$ ) отличны от нуля только поперечные составляющие электромагнитного поля ( $E_{0z}^\pm(r=0, \varphi, z) = H_{0z}^\pm(r=0, \varphi, z) = 0$ ):

$$E_{0y}^+(r=0, \varphi, z) = iE_{0x}^-(r=0, \varphi, z) = -E_{0y}^-(r=0, \varphi, z) = \pi \lambda^{1/2} z \Psi_{3/2}(z), \quad (14)$$

$$H_{0x}^+(r=0, \varphi, z) = -H_{0x}^-(r=0, \varphi, z) = \frac{-i\lambda^{3/2}}{2\mu} \left[ 2\Psi_{3/2}(z) - kz^2 \Psi_{5/2}(z) \right], \quad (15)$$

$$H_{0y}^+(r=0, \varphi, z) = H_{0y}^-(r=0, \varphi, z) = \frac{\lambda^{3/2}}{2\mu} [2\psi_{3/2}(z) - kz^2\psi_{5/2}(z)]. \quad (16)$$

Из (15)–(16) видно, что на некоторых расстояниях  $z$  поперечные магнитные составляющие могут быть равны нулю. При  $n > 1$  на оптической оси ( $r=0$ ) все проекции поля пучка Ханкеля равны нулю. При  $n=1$  на оптической оси ( $r=0$ ) отличны от нуля только продольные компоненты пучка Ханкеля с левой поляризацией

$$E_{1z}^-(r=0, \varphi, z) = \lambda^{3/2}\psi_{3/2}(z), \quad (17)$$

$$H_{1z}^-(r=0, \varphi, z) = \frac{\lambda^{3/2}z}{\mu}\psi_{5/2}(R), \quad (18)$$

а при  $n=-1$  на оптической оси ( $r=0$ ) отличны от нуля только продольные компоненты пучка Ханкеля с правой поляризацией

$$E_{-1z}^+(r=0, \varphi, z) = \pi\lambda^{1/2}\psi_{1/2}(z), \quad (19)$$

$$H_{-1z}^+(r=0, \varphi, z) = \frac{-\pi\lambda^{1/2}z}{\mu}\psi_{3/2}(z). \quad (20)$$

Это приводит к тому, что при  $n=1$  и левой круговой поляризации на малых расстояниях  $z$  вместо светового кольца формируется световое пятно, которое затем преобразуется в кольцо. Это видно на рис. 1, на котором показаны распределения интенсивности пучка Ханкеля с единичным топологическим зарядом ( $n=1$ ) с линейной ( $E_y=0$ ) (рис. 1а, з, ж), правой круговой (рис. 1б, д, э) и левой круговой (рис. 1в, е, и) поляризацией на расстояниях  $z=\lambda/4$  (рис. 1а–в),  $z=\lambda/2$  (рис. 1з–е) и  $z=\lambda$  (рис. 1ж–и). На рис. 1а–в показана область  $-\lambda/2 \leq x, y \leq \lambda/2$ , на рис. 1з–е показана область  $-3\lambda/2 \leq x, y \leq 3\lambda/2$ , а на рис. 1ж–и показана область  $-\lambda \leq x, y \leq 3\lambda$ .

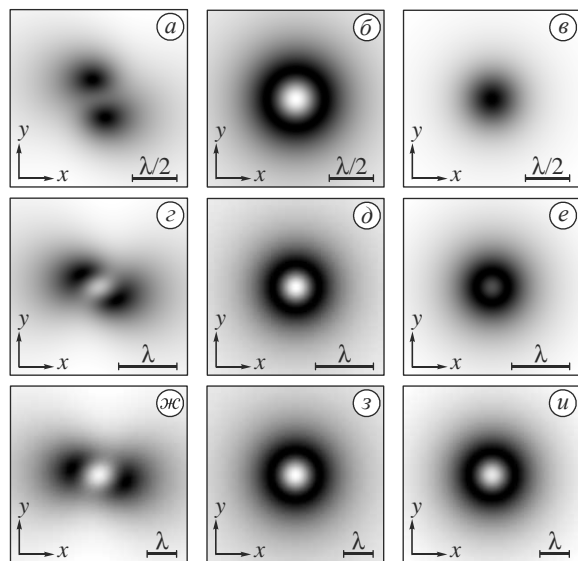


Рис. 1. Распределения интенсивности  $I = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$  (негатив) пучка Ханкеля ( $n=1$ ) с линейной (а, з, ж), правой круговой (б, д, э) и левой круговой (в, е, и) поляризацией на расстояниях  $z = \lambda/4$  (а–в),  $z = \lambda/2$  (з–е) и  $z = \lambda$  (ж–и)

Из рис. 1 видно, что если для линейной поляризации пучок Ханкеля не обладает круговой симметрией (и вращается в ближней зоне), то пучки Ханкеля с круговой поляризацией обладают круговой симметрией и имеют вид светового круга или кольца. Последнее видно и из выражения для интенсивности для правой круговой поляризации, которое не зависит от азимутального угла:

$$I_n^+(r, z) = \pi^2 \lambda r^{2n} (2z^2 + r^2) |\psi_{n+3/2}(R)|^2. \quad (21)$$

Выражение для интенсивности пучка Ханкеля с левой круговой поляризацией более громоздкое, но тоже не зависит от азимутального угла:

$$I_n^-(r, z) = \pi^2 \lambda r^{2n} (2z^2 + r^2) |\psi_{n+3/2}(R)|^2 + n\lambda^3 r^{2n-2} \times [n |\psi_{n+1/2}(R)|^2 - kr^2 \text{Re}(\psi_{n+1/2}(R)\psi_{n+3/2}^*(R))], \quad (22)$$

где  $\text{Re}(\dots)$  – действительная часть числа. Из (22) видно, что при  $n=1$  на оптической оси ( $r=0$ ) интенсивность будет убывать с ростом  $z$ :

$$I_1^-(r=0, z) = \lambda^3 |\psi_{3/2}(z)|^2 = \frac{\lambda^4}{\pi^2 z^4} \left(1 + \frac{1}{(kz)^2}\right). \quad (23)$$

## 2. Вихревые векторные пучки Ханкеля с круговой поляризацией в дальней зоне

При  $z \gg \lambda$  формулы упрощаются. Пользуясь асимптотикой функции Ханкеля ( $x \gg 1$ )

$$H_\nu^{(1)}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (-i)^{\nu+1/2} e^{ix}, \quad (24)$$

вместо (2) получим

$$\psi_{n+\nu}(R) = \frac{H_{n+\nu}^{(1)}(kR)}{R^{n+\nu}} \approx \frac{\lambda^{1/2} (-i)^{n+\nu+1/2} e^{ikR}}{\pi R^{n+\nu+1/2}}. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (1)–(6), для пучка Ханкеля с правой поляризацией получим:

$$E_{ny}^+(r, \varphi, z) = iE_{nx}^+(r, \varphi, z) = -\lambda \frac{r^n z}{R^{n+2}} e^{in\varphi + ikR}, \quad (26)$$

$$E_{nz}^+(r, \varphi, z) = -i\lambda \frac{r^{n+1}}{R^{n+2}} e^{i(n+1)\varphi + ikR}, \quad (27)$$

$$H_{nx}^+(r, \varphi, z) = \frac{\lambda}{\mu} \left( i \frac{n+2}{kR^{n+2}} + \frac{ir^2 e^{i\varphi} \sin \varphi - z^2}{R^{n+3}} \right) r^n e^{in\varphi + ikR}, \quad (28)$$

$$H_{ny}^+(r, \varphi, z) = i \frac{\lambda}{\mu} \left( i \frac{n+2}{kR^{n+2}} - \frac{r^2 e^{i\varphi} \cos \varphi + z^2}{R^{n+3}} \right) r^n e^{in\varphi + ikR}, \quad (29)$$

$$H_{nz}^+(r, \varphi, z) = \frac{\lambda}{\mu} \frac{r^{n+1} z}{R^{n+3}} e^{i(n+1)\varphi + ikR}. \quad (30)$$

Аналогично вместо (7)–(11) для пучка Ханкеля с левой поляризацией получим в дальней зоне:

$$E_{ny}^-(r, \varphi, z) = -iE_{nx}^-(r, \varphi, z) = \lambda \frac{r^n z}{R^{n+2}} e^{in\varphi + ikR}, \quad (31)$$

$$E_{nz}^-(r, \varphi, z) = -i\lambda \frac{r^{n+1}}{R^{n+2}} \left(1 - \frac{2inR}{kr^2}\right) e^{i(n-1)\varphi + ikR}, \quad (32)$$

$$H_{nx}^-(r, \varphi, z) = \frac{\lambda^2}{2\pi\mu} \frac{r^n}{R^{n+3}} \left\{ \frac{2n(n-1)e^{-2i\varphi}}{kr^2} R^2 + \right. \\ \left. + i(2ne^{-2i\varphi} - n - 2)R + k(z^2 + ir^2 e^{-i\varphi} \sin \varphi) \right\} e^{in\varphi + ikR}, \quad (33)$$

$$H_{ny}^-(r, \varphi, z) = \frac{\lambda^2}{2\pi\mu} \frac{r^n}{R^{n+3}} \left\{ i \frac{2n(n-1)e^{-2i\varphi}}{kr^2} R^2 - \right. \\ \left. - (2ne^{-2i\varphi} + n + 2)R - ik(z^2 + r^2 e^{-i\varphi} \cos \varphi) \right\} e^{in\varphi + ikR}, \quad (34)$$

$$H_{nz}^-(r, \varphi, z) = \frac{\lambda}{\mu} \frac{r^{n+1} z}{R^{n+3}} \left( \frac{2inR}{kr^2} - 1 \right) e^{i(n-1)\varphi + ikR}. \quad (35)$$

Распределения интенсивности в дальней зоне для правой и левой поляризаций вместо (21) и (22) будут равны:

$$I_n^+(r, \varphi, z) = \\ = |E_{nx}^+(r, \varphi, z)|^2 + |E_{ny}^+(r, \varphi, z)|^2 + |E_{nz}^+(r, \varphi, z)|^2 = \quad (36) \\ = \lambda^2 \frac{r^{2n}}{R^{2n+4}} (r^2 + 2z^2),$$

$$I_n^-(r, \varphi, z) = \\ = |E_{nx}^-(r, \varphi, z)|^2 + |E_{ny}^-(r, \varphi, z)|^2 + |E_{nz}^-(r, \varphi, z)|^2 = \quad (37) \\ = \lambda^2 \frac{r^{2n}}{R^{2n+4}} \left( r^2 + 2z^2 + \frac{4n^2 R^2}{k^2 r^2} \right).$$

Из выражений (36) и (37) видно, что при  $n > 0$  интенсивность пучка Ханкеля с левой круговой поляризацией всегда больше, чем интенсивность пучка с правой круговой поляризацией. Это объясняется тем, что продольная составляющая  $E_z$  у пучка с левой круговой поляризацией имеет большую энергию, как

$$S_{nx}^+(r, \varphi, z) = E_{ny}^{+*}(r, \varphi, z) H_{nz}^+(r, \varphi, z) - E_{nz}^{+*}(r, \varphi, z) H_{ny}^+(r, \varphi, z) = \\ = \left[ -\lambda \frac{r^n z}{R^{n+2}} e^{-in\varphi - ikR} \right] \left[ \frac{\lambda}{\mu} \frac{r^{n+1} z}{R^{n+3}} e^{i(n+1)\varphi + ikR} \right] - \left[ i\lambda \frac{r^{n+1}}{R^{n+2}} e^{-i(n+1)\varphi - ikR} \right] \left[ i \frac{\lambda}{\mu} \left( i \frac{n+2}{kR^{n+2}} - \frac{r^2 e^{i\varphi} \cos \varphi + z^2}{R^{n+3}} \right) r^n e^{in\varphi + ikR} \right] = \quad (40) \\ = \frac{\lambda^2}{\mu} \frac{r^{2n+1}}{R^{2n+5}} \left[ i \frac{n+2}{k} R e^{-i\varphi} - (r^2 + 2z^2) \cos \varphi \right],$$

$$S_{ny}^+(r, \varphi, z) = E_{nz}^{+*}(r, \varphi, z) H_{nx}^+(r, \varphi, z) - E_{nx}^{+*}(r, \varphi, z) H_{nz}^+(r, \varphi, z) = \\ = \left[ i\lambda \frac{r^{n+1}}{R^{n+2}} e^{-i(n+1)\varphi - ikR} \right] \left[ \frac{\lambda}{\mu} \left( i \frac{n+2}{kR^{n+2}} + \frac{ir^2 e^{i\varphi} \sin \varphi - z^2}{R^{n+3}} \right) r^n e^{in\varphi + ikR} \right] + \left[ i\lambda \frac{r^n z}{R^{n+2}} e^{-in\varphi - ikR} \right] \left[ \frac{\lambda}{\mu} \frac{r^{n+1} z}{R^{n+3}} e^{i(n+1)\varphi + ikR} \right] = \quad (41) \\ = \frac{\lambda^2}{\mu} \frac{r^{2n+1}}{R^{2n+5}} \left[ -\frac{n+2}{k} R e^{-i\varphi} - (r^2 + 2z^2) \sin \varphi \right],$$

и для левой круговой поляризации:

видно из (27) и (32), хотя поперечные составляющие (26) и (31) у пучков обеих поляризаций одинаковы.

Максимум интенсивности для правой круговой поляризации лежит на световом кольце с радиусом, равным:

$$r_{\max}^+ = z \sqrt{\frac{n-3 + \sqrt{n^2 + 2n + 9}}{2}}. \quad (38)$$

Этот радиус равен нулю (то есть максимум интенсивности на оптической оси) только при  $n = 0$ . При больших топологических зарядах ( $n \gg 1$ ) радиус светового кольца, на котором находится максимум интенсивности, увеличивается с ростом  $z$  как  $r_{\max}^+ = z\sqrt{n}$ . В случае левой круговой поляризации уравнение для максимума интенсивности сложнее:

$$(n-3) \frac{r^4}{z^4} + 2n \frac{r^2}{z^2} - \frac{r^6}{z^6} + \\ + \frac{4n^2(n-3)r^2}{(kz)^2 z^2} + \frac{4n^2(n-1)}{(kz)^2} - \frac{8n^2}{(kz)^2} \frac{r^4}{z^4} = 0, \quad (39)$$

но, так как предполагается, что  $z \gg \lambda$ , знаменатели в последних трех слагаемых являются большими величинами и потому можно оставить только первые три слагаемых. В этом случае из (39) получается выражение для максимума интенсивности, совпадающее с выражением для правой круговой поляризации, т.е.  $r_{\max}^- \approx r_{\max}^+$ .

Комплексный вектор Умова–Пойнтинга  $\mathbf{S} = \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}$  может быть рассчитан для пучков Ханкеля с круговой поляризацией, пользуясь выражениями для проекций электрического и магнитного векторов (1)–(11). Но эти выражения будут громоздкими, и их анализ будет затруднителен. Выражения же для проекций вектора Умова–Пойнтинга для пучка Ханкеля с круговой поляризацией в дальней зоне выглядят менее громоздкими. Приведем выражения только для поперечных проекций вектора  $\mathbf{S}$ , которые участвуют в определении осевой проекции вектора углового момента. Тогда для правой круговой поляризации:

$$S_{nx}^-(r, \varphi, z) = E_{ny}^*(r, \varphi, z)H_{nz}^-(r, \varphi, z) - E_{nz}^*(r, \varphi, z)H_{ny}^-(r, \varphi, z) = \frac{\lambda^2}{\mu} \frac{r^{2n+1}}{R^{2n+5}} \left\{ 2z^2 \left( \frac{2nR}{kr^2} \sin \varphi - \cos \varphi \right) + \left( 1 + \frac{2inR}{kr^2} \right) \left[ \frac{2n(n-1)e^{-i\varphi}}{r^2} \frac{R^2}{k^2} + i(2ne^{-2i\varphi} + n + 2) \frac{R}{k} e^{i\varphi} - r^2 \cos \varphi \right] \right\}, \quad (42)$$

$$S_{ny}^-(r, \varphi, z) = E_{nz}^*(r, \varphi, z)H_{nx}^-(r, \varphi, z) - E_{nx}^*(r, \varphi, z)H_{nz}^-(r, \varphi, z) = \frac{\lambda^2}{\mu} \frac{r^{2n+1}}{R^{2n+5}} \left\{ \left( 1 + \frac{2inR}{kr^2} \right) \left[ i \frac{2n(n-1)e^{-i\varphi}}{r^2} \frac{R^2}{k^2} - (2ne^{-2i\varphi} - n - 2) \frac{R}{k} e^{i\varphi} - r^2 \sin \varphi \right] - 2z^2 \left( \sin \varphi + \frac{2nR}{kr^2} \cos \varphi \right) \right\}. \quad (43)$$

Проекция на ось  $z$  векторов плотности углового момента  $\mathbf{j} = \text{Re}[\mathbf{r} \times \mathbf{S}]$  для пучков Ханкеля в дальней зоне с правой и левой круговой поляризациями имеют вид:

$$j_{nz}^+(r, \varphi, z) = \text{Re} \left\{ x S_{ny}^+(r, \varphi, z) - y S_{nx}^+(r, \varphi, z) \right\} = -\frac{\lambda^2}{\mu} \frac{n+2}{k} \frac{r^{2n+2}}{R^{2n+4}}, \quad (44)$$

$$j_{nz}^-(r, \varphi, z) = \text{Re} \left\{ x S_{ny}^-(r, \varphi, z) - y S_{nx}^-(r, \varphi, z) \right\} = -\frac{\lambda^2}{\mu} \frac{r^{2n+1}}{R^{2n+5}} \left[ 4n^2(n-1) \frac{R^3}{k^3 r^3} + (n-2) \frac{R}{k} r + 4nz^2 \frac{R}{kr} \right]. \quad (45)$$

При  $r=0$  плотность ОУМ (44), (45) не стремится к бесконечности, а равна нулю независимо от поляризации. Из (44) следует, что полный угловой момент пучка Ханкеля бесконечный. Заметим, что при  $n=0$  у пучка Ханкеля остается спиновый угловой момент:

$$j_{0z}^+(r, \varphi, z) = -j_{0z}^-(r, \varphi, z) = -\frac{2\lambda^2}{\mu k} \frac{r^2}{R^4}. \quad (46)$$

### Заключение

В работе получены следующие результаты. Получены явные аналитические выражения для всех шести проекций электрического и магнитного векторов напряженности электромагнитного поля для векторных вихревых пучков Ханкеля с круговой поляризацией. Эти выражения точно удовлетворяют системе уравнений Максвелла. Показано отличие в характере распространения в пространстве для пучков Ханкеля с левой и правой круговыми поляризациями. Так, для пучка Ханкеля с топологическим зарядом  $n$  амплитуда продольных составляющих электрического и магнитного поля имеет топологический заряд  $n+1$  для правой и  $n-1$  для левой круговой поляризации. Получены выражения для полной интенсивности электрического поля во всем пространстве. Эти выражения оказались разными для пучков Ханкеля с левой и правой круговой поляризацией. Из этих выражений видно, что пучки Ханкеля с круговой поляризацией обладают в поперечном сечении круговой симметрией. Пучки Ханкеля с линейной поляризацией круговой симметрией не обладают [9]. Получены также выражения в дальней зоне дифракции для проекций векторов Умова–Пойнтинга и углового момента. При нулевом топологическом заряде у пучка Ханкеля с круговой поляризацией остается отличным от нуля спиновый угловой момент.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (НШ-9498.2016.9), а также грантов РФФИ 14-29-07133, 15-07-01174, 15-37-20723, 15-47-02492, 16-29-11698, 16-47-630483.

### Литература

1. **Mishra, S.R.** A vector wave analysis of a Bessel beam / S.R. Mishra // Optics Communications. – 1991. – Vol. 85, Issue 2-3. – P. 159-161. – DOI: 10.1016/0030-4018(91)90386-R.
2. **Bouchal, Z.** Non-diffractive vector Bessel beams / Z. Bouchal, M. Olivik // Journal of Modern Optics. – 1995. – Vol. 42, Issue 8. – P. 1555-1566. – DOI: 10.1080/09500349514551361.
3. **Horak, R.** Nondiffracting stationary electromagnetic fields / R. Horak, Z. Bouchal, J. Bajcar // Optics Communications. – 1997. – Vol. 133, Issues 1-6. – P. 315-327. – DOI: 10.1016/S0030-4018(96)00490-7.
4. **Jauequi, R.** Quantum-mechanical properties Bessel beams / R. Jauequi, S. Hacyan // Physical Review A. – 2005. – Vol. 71, Issue 3. – P. 033411. – DOI: 10.1103/PhysRevA.71.033411.
5. **Yu, Y.Z.** Vector analyses of nondiffracting Bessel beams / Y.Z. Yu, W.B. Dou // Progress In Electromagnetics Research Letters. – 2008. – Vol. 5. – P. 57-71.
6. **Wang, Y.** Vector analyses of linearly and circularly polarized Bessel beams using Herz vector potentials / Y. Wang, W. Dou, H. Meng // Optics Express. – 2014. – Vol. 22, Issue 7. – P. 7821-7830. – DOI: 10.1364/OE.22.007821.
7. **Котляр, В.В.** Непараксиальные вихревые лазерные пучки Ханкеля первого и второго типов / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, В.А. Соифер // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39, № 3. – С. 299-304.
8. **Котляр, В.В.** Векторные лазерные пучки Ханкеля с орбитальным угловым моментом / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв // Компьютерная оптика. – 2015. – Т. 39, № 4. – С. 449-452. – DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-4-449-452.
9. **Kotlyar, V.V.** Vectorial rotating vortex Hankel laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Journal of Optics. – 2016. – Vol. 18(9). – P. 095602. – DOI: 10.1088/2040-8978/18/9/095602.
10. **Cerjan, A.** Orbital angular momentum of Laguerre-Gaussian beams beyond the paraxial approximation / A. Cerjan, C. Cerjan // Journal of the Optical Society of America A. – 2011. – Vol. 28, Issue 11. – P. 2253-2260. – DOI: 10.1364/JOSAA.28.002253.
11. **Youngworth, K.S.** Focusing of high numerical aperture cylindrical-vector beams / K.S. Youngworth, T.G. Brown // Optics Express. – 2000. – Vol. 7, Issue 2. – P. 77-87. – DOI: 10.1364/OE.7.000077.

12. **Zhan, Q.** Focus shaping using cylindrical vector beams / Q. Zhan, J.R. Leger // *Optics Express*. – 2002. – Vol. 10, Issue 7. – P. 324-331. – DOI: 10.1364/OE.10.000324.
13. **Allen, L.** Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes / L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman // *Physical Review A*. – 1992. – Vol. 45, Issue 11. – P. 8185-8189. – DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
14. **Volke-Sepulveda, K.** Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam / K. Volke-Sepulveda, V. Garcés-Chávez, S. Chávez-Cedra, J. Arlt, K. Dholakia // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. – 2002. – Vol. 4(2). – P. S82-S89.

#### Сведения об авторах

**Котляр Виктор Викторович**, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета. В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.

**Ковалёв Алексей Андреевич**, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. В списке научных работ более 80 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: [alanko@smr.ru](mailto:alanko@smr.ru).

**Вольнов Максим Алексеевич**, 1993 года рождения, студент 2-го курса магистратуры по специальности «Прикладная физика и математика» Самарского национального исследовательского университета имени академика С. П. Королева. Область научных интересов: лазерная оптика, дифракционная оптика.

ГРТИ: 29.31.15.

Поступила в редакцию 15 сентября 2016 г. Окончательный вариант – 29 ноября 2016 г.

## VECTORIAL VORTEX HANKEL BEAMS WITH CIRCULAR POLARIZATION

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>, M.A. Volynov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia,

<sup>2</sup>Samara National Research University, Samara, Russia

### Abstract

We have considered circularly polarized vectorial Hankel beams. These beams are a generalization of the spherical wave with embedded optical vortex. Explicit analytical expressions have been derived for all six components of the electric and magnetic vectors of the electromagnetic field. These expressions are an exact solution of Maxwell's equations. We have shown the difference in free space propagation for Hankel beams with left and right circular polarization. For the far field, we also obtained expressions for the components of the Umov-Poynting vector and angular momentum

**Keywords:** optical vortex, Hankel beam, circular polarization, Maxwell equations, orbital angular momentum.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA, Volynov MA. Vectorial vortex Hankel beams with circular polarization. *Computer Optics* 2016; 40(6): 765-771. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-6-765-771.

**Acknowledgements:** The work was partially funded by the Russian Federation Ministry of Education and Science, RF Presidential grant for Support of Leading Scientific schools (NSH-9498.2016.9), and Russian Foundation of Basic Research grants ## 14-29-07133, 15-07-01174, 15-37-20723, 15-47-02492, 16-29-11698, and 16-47-630483.

### References

- [1] Mishra SR. A vector wave analysis of a Bessel beam. *Opt Commun* 1991; 85(2-3): 159-161. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90386-R.
- [2] Bouchal Z, Olivík M. Non-diffractive vector Bessel beams. *J Mod Opt* 1995; 42(8): 1555-1566. DOI: 10.1080/09500349514551361.
- [3] Horak R, Bouchal Z, Bajer J. Nondiffracting stationary electromagnetic fields. *Opt Commun* 1997; 133(1-6): 315-327. DOI: 10.1016/S0030-4018(96)00490-7.
- [4] Jauequi R, Hacyan S. Quantum-mechanical properties Bessel beams. *Phys Rev A* 2005; 71(3): 033411. DOI: 10.1103/PhysRevA.71.033411.
- [5] Yu YZ, Dou WB. Vector analyses of nondiffracting Bessel beams. *Prog in Electr Res Lett* 2008; 5: 57-71.

- [6] Wang Y, Dou W, Meng H. Vector analyses of linearly and circularly polarized Bessel beams using Herz vector potentials. *Opt Express* 2014; 22(7): 7821-7830. DOI: 10.1364/OE.22.007821.
- [7] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Nonparaxial Hankel vortex beams of the first and second types. *Computer Optics* 2015; 39(3): 299-304.
- [8] Kotlyar VV, Kovalev AA. Vectorial Hankel laser beams carrying orbital angular momentum. *Computer Optics* 2015; 39(4): 449-452. DOI: 10.18287/0134-2452-2015-39-4-449-452.
- [9] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Vectorial rotating vortex Hankel laser beams. *J Opt* 2016; 18(9): 095602. DOI: 10.1088/2040-8978/18/9/095602.
- [10] Cerjan A, Cerjan C. Orbital angular momentum of Laguerre-Gaussian beams beyond the paraxial approximation. *J Opt Soc Am A* 2011; 28(11): 2253-2260. DOI: 10.1364/JOSAA.28.002253.
- [11] Youngworth KS, Brown TG. Focusing of high numerical aperture cylindrical-vector beams. *Opt Express* 2000; 7(2): 77-87. DOI: 10.1364/OE.7.000077.
- [12] Zhan Q, Leger JR. Focus shaping using cylindrical vector beams. *Opt Express* 2002; 10(7): 324-331. DOI: 10.1364/OE.10.000324.
- [13] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. *Phys Rev A* 1992; 45(11): 8185-8189. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.
- [14] Volke-Sepulveda K, Garcés-Chávez V, Chávez-Cedra S, Arlt J, Dholakia K. Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam. *J Opt B: Quantum Semiclass Opt* 2002; 4(2): S82-S89.

#### *Authors' information*

**Victor Victorovich Kotlyar** is the head of a laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and a professor of Computer Science department at Samara National Research University. He graduated from Kuibyshev State University (1979), received his Candidate's and Doctor's Degrees in Physics & Mathematics from Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation of the RAS (1992). He is a co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current research interests include diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices.

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 80 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices. E-mail: [alanko@smr.ru](mailto:alanko@smr.ru).

**Maxim Alekseevich Volynov** (b.1993) student majoring in Applied Mathematics and Physics in Samara National Research University. Scientific interests: laser optics and diffractive optics.

*Received September 15, 2016. The final version – November 29, 2016.*