

## АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ НА НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

С.И. Харитонов<sup>1,2</sup>, Л.Л. Досколович<sup>1,2</sup>, Н.Л. Казанский<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия,

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия

### Аннотация

Предложен асимптотический метод расчета комплексной амплитуды поля в случае дифракции на неперидических структурах, обладающих зонной структурой. Новизна состоит в разложении решения интегрального уравнения по базису, который получается при решении задачи прохождения ДОО в рамках геометрической оптики и переходит в базис плоских волн, используемый при расчете дифракционных решеток. Представлены результаты фокусировки в точку с помощью градиентного дифракционного оптического элемента, имеющего зонную структуру. Результаты моделирования подтверждают работоспособность предложенного метода.

**Ключевые слова:** дифракционный оптический элемент, асимптотический метод, метод связанных волн, неперидическая структура, квазиперидическая структура, микрорельеф.

**Цитирование:** Харитонов, С.И. Асимптотический метод решения задач дифракции на неперидических структурах / С.И. Харитонов, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский // Компьютерная оптика. – 2017. – Т. 41, № 2. – С. 160-168. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-2-160-168.

### Введение

Дифракционные оптические элементы (ДОО) используются в оптических схемах для минимизации массогабаритных характеристик. Методы расчета и проектирования ДОО с различными функциональными возможностями изложены в работах [1–7].

Методы решения задач дифракции на ДОО с большой апертурой (в сотни и тысячи длин волн) при размерах зон микрорельефа, сравнимых с длиной волны, позволяющие корректно учесть эффекты строгой волновой теории, в настоящее время отсутствуют. Создание таких методов требует проведения фундаментальных исследований в области решения прямых задач дифракции в рамках строгой электромагнитной теории.

Цель состоит в разработке методов моделирования ДОО с большой апертурой в рамках строгой электромагнитной теории.

Свет представляет собой электромагнитные волны, и поэтому строгое решение задачи дифракции должно быть основано на решении системы уравнений Максвелла с соответствующими задачами граничными условиями.

Расчет дифракции на ДОО в рамках строгой электромагнитной теории является сложнейшей задачей. В настоящее время задача дифракции в рамках строгой электромагнитной теории решается только для простых структур с размером в несколько длин волн. Из-за вычислительной сложности решение даже прямой задачи дифракции ограничено диаметром апертуры ДОО в несколько десятков длин волн. Методы геометрической теории дифракции неприменимы из-за малого по сравнению с длиной волны размера зон микрорельефа. Методы строгой теории неприменимы из-за большого размера апертуры ДОО и, соответственно, большого объема вычислений.

В данной работе рассмотрим дифракцию света на ДОО, который имеет зонную структуру. ДОО, имеющие зонную структуру, используют для фоку-

сировки излучения, а также в качестве корректоров аберраций в изображающих оптических системах. Простейшим ДОО, имеющим зонную структуру, является зонная пластинка Френеля.

Асимптотические методы широко используются при расчете полей, создаваемых различными оптическими элементами. Наиболее распространенным асимптотическим методом является лучевой метод. Однако лучевой метод неприменим для расчета поля вблизи каустик. Для нахождения поля вблизи каустик были разработаны эффективные методы, изложенные в работах [8–12]. Следует отметить, что в приведенных работах дифракционные поправки учитывались только в окрестности фокальной кривой и не рассматривались дифракционные явления при прохождении света внутри ДОО. Впервые учет дифракции внутри ДОО был сделан в работах [14–16]. В этих работах ДОО представлялось в виде набора дифракционных решеток и решение задачи дифракции на ДОО сводилось к решению задачи на дифракционной решетке. В работах [14–18] рассмотрены двумерные ДОО (свойства вдоль третьей оси не меняются). В дальнейшем этот подход был использован для моделирования работы ДОО в трехмерном случае [19–20].

В данной работе для решения задачи дифракции на ДОО с зонной структурой разработан новый асимптотический метод решения задач дифракции для ТЕ-поляризованных волн.

Предлагаемый асимптотический метод позволит корректно учесть эффекты строгой электромагнитной теории при решении задач дифракции на ДОО с большими апертурами (в сотни и тысячи длин волн) при размерах зон дифракционного микрорельефа в несколько длин волн и менее.

В случае ТЕ-поляризованной волны решение сводится к решению уравнения Гельмгольца.

Предложенный метод является развитием метода связанных волн (rigorous coupled wave analysis), который используется при расчете поля от перидических структур.

Метод основан на строгом решении эталонной задачи дифракции на квазипериодической структуре, с линейно изменяющимся вдоль некоторого направления периодом. Такая эталонная задача для построения асимптотического метода используется впервые.

Физически указанная эталонная задача означает локальную аппроксимацию зонного микрорельефа ДОО сегментом дифракционной линзы. При этом решении задачи дифракции на ДОО в окрестности некоторой точки сводится к строгому решению задачи дифракции на сегменте дифракционной линзы, аппроксимирующей микрорельеф ДОО в указанной окрестности. Частным случаем является асимптотическое решение задачи дифракции через локальную аппроксимацию микрорельефа ДОО дифракционной решеткой. Локальное представление ДОО дифракционной решеткой ранее использовалось при моделировании двумерных (свойства не зависят от третьей координаты) и радиально-симметричных ДОО. Тем не менее, использованный подход носил эвристический характер и не рассматривался как асимптотический метод решения уравнений Максвелла.

Специальный базис для представления диэлектрической проницаемости и поля обеспечит эффективное решение соответствующих интегральных уравнений.

Асимптотический метод будет использован для расчета электромагнитного поля на выходе ДОО. Для описания дальнейшего распространения излучения в свободном пространстве возможно использование интеграла Кирхгофа и других интегральных представлений [14].

Предложенный метод по своей сути похож на метод связанных волн, который используется для решения задач дифракции на периодических структурах. В дальнейшем будем называть этот метод локальным методом связанных волн. По сравнению со строгим решением уравнений Максвелла он обладает на порядок меньшей вычислительной сложностью.

В данной работе решена задача дифракции для ТЕ-поляризованных волн. Для упрощения задачи на данном этапе будем рассматривать двумерную задачу. Это позволит нам найти закономерности и разработать методы решения, которые впоследствии можно будет распространить на случай трех измерений и поверхностных структур [15]. Данный подход является промежуточным между приближением Кирхгофа (в рамках приближения Кирхгофа поле на выходе элемента рассчитывается в рамках геометрической оптики) и методами, основанными на использовании строгого электромагнитного подхода.

Указанный подход к решению прямой задачи дифракции позволит решать обратные задачи расчета ДОО.

### 1. Постановка задачи и сведение к решению интегро-дифференциального уравнения

Рассмотрим дифракцию света на диэлектрическом слое, расположенном перпендикулярно оси  $z$ . Пусть диэлектрический слой расположен в области  $0 < z < h$ . Для решения задачи дифракции необходимо найти поле в трех областях пространства:

- в области вне дифракционного оптического элемента со стороны источника волн;
- в области вне дифракционного оптического элемента со стороны, не содержащей источника волн;
- в области внутри дифракционного оптического элемента.

Распространение света в скалярном приближении во всех трех областях пространства описывается уравнением Гельмгольца

$$\begin{aligned} (\partial^2 E / \partial z^2) &= HE, \\ H &= -(\partial^2 / \partial x^2) - k^2 \epsilon(x, z), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $H$  – дифференциальный оператор,  $\epsilon(x, z)$  – диэлектрическая проницаемость,  $x$  – декартова координата вдоль ДОО,  $z$  – ось координат, перпендикулярная плоскости ДОО,  $k$  – волновое число.

Представим решение уравнения и функцию диэлектрической проницаемости в виде обратного преобразования Фурье

$$\begin{aligned} \epsilon(x, z) &= F^{-1} [\epsilon(\zeta, z)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(\zeta, z) \exp(ik\zeta(x - x_0)) d\zeta, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\omega$  – пространственная частота,  $x_0$  – координата точки в окрестности которой ищется поле.

$$\begin{aligned} E(x, z) &= F^{-1} [f^\zeta(z)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^\zeta(z) \exp(ik\zeta(x - x_0)) d\zeta. \end{aligned} \quad (3)$$

Функции  $\epsilon(\zeta, z)$  и  $f^\zeta(z)$  выражаются через прямое преобразование Фурье

$$\begin{aligned} \epsilon(\zeta, z) &= F [\epsilon(x, z)] = \\ &= (k/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(x, z) \exp(-ik\zeta(x - x_0)) dx, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} f^\zeta(z) &= F [E(x, z)] = \\ &= (k/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} E(x, z) \exp(ik\zeta(x - x_0)) dx, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $x_0$  – точка, в окрестности которой решается задача дифракции.

В этом случае решение уравнения Гельмгольца сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} d^2 f^\zeta(z) / dz^2 &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-k^2 \epsilon(\zeta - \eta) + k^2 \eta^2 \delta(\zeta - \eta)) f^\eta(z) d\eta. \end{aligned} \quad (6)$$

### 2. Решение в приближении геометрической оптики

Рассмотрим решение задачи дифракции в области после эталонного ДОО в приближении геометрической оптики. Рассмотрение этой задачи даст нам способ представления решения интегро-дифференциального уравнения. Эталонный ДОО – это оптический элемент с показателем преломления следующего вида

$$n(x) = \Phi(g(x)) = \sum_n N_n \exp(ikng(x)), \quad (7)$$

где  $\Phi(x)$  – функция с периодом  $2\pi$ . Для многоуровневой дифракционной решетки эта функция определяет закон квантования микрорельефа. Показатель преломления изменяется только по апертуре и не зависит от продольной координаты. Функция  $g(x)$  в окрестности точки  $x_0$  имеет вид

$$g(x) = g(x_0) + \alpha(x - x_0) + (\beta/2)(x - x_0)^2. \quad (8)$$

Функция  $g(x)$  – эйкональная функция в окрестности точки  $x_0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  – первая и вторая производные функции.

Такой вид показателя преломления выбран потому, что он хорошо описывает распределение показателя преломления для фазовой зонной пластинки Френеля (дифракционной линзы). Многие ДОО представляют собой набор различных участков дифракционной линзы с различным положением фокуса. Например, известный всем фокусатор в кольцо [9] представляет собой элемент, каждая точка которого – это дифракционная линза, фокусное расстояние которой меняется от точки к точке. Диэлектрическую проницаемость в этом случае можно записать в виде

$$\varepsilon(x) = n^2(x) = \sum_m \varepsilon_m \exp(ikmg(x)). \quad (9)$$

Предположим, что на такой оптический элемент падает плоская электромагнитная волна.

При нормальном падении прошедшее отраженное поле и поле внутри элемента в приближении геометрической оптики имеет вид

$$\begin{aligned} E_r(x) &= E_0(x)R(q)\exp(2ikh\Phi(q)), \\ E_m(x, z) &= E_0(x)U(q, \Phi(q), z), \\ E_t(x) &= E_0(x)T(q)\exp(ikh\Phi(q)), \end{aligned} \quad (10)$$

$$U(q, t, z) = A^+(q)\exp(ikzt) + A^-(q)\exp(ik(2h - z)t),$$

где  $h$  – толщина ДОО,  $t = \Phi(q)$ ,  $q = kg(x)$ . Так как функции  $T(q)$ ,  $R(q)$ ,  $A^+(q)$ ,  $A^-(q)$ ,  $\exp(ikh\Phi(q))$  являются периодическими функциями  $q$ , их можно разложить в ряд Фурье.

$$\begin{aligned} E_r(x, z) &= E_0(x) \sum_n R^n(x_0) \exp(ikng(x)), \\ E_m(x, z) &= E_0(x) \sum_n U^n(x_0, z) \exp(ikng(x)), \\ E_t(x, z) &= E_0(x) \sum_n T^n(x_0) \exp(ikng(x)). \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим случай  $E_0(x) = 1$ . Для дальнейших рассуждений перейдем в пространственно-частотное представление. Подставляем выражение (11) в выражение (5), получаем

$$\begin{aligned} f_r^\zeta(x_0) &= \sum_n R^n(x_0) V_n^\zeta, \\ f_m^\zeta(x_0, z) &= \sum_n U^n(x_0, z) V_n^\zeta, \\ f_t^\zeta(x_0) &= \sum_n T^n(x_0) V_n^\zeta, \end{aligned} \quad (12)$$

где функция  $V_s^\zeta$  имеет вид

$$\begin{aligned} V_s^\zeta &= \sqrt{\frac{ik}{2\pi\beta_s}} g_s(x_0) \exp\left(-ik \frac{(\zeta - s\alpha)^2}{2s\beta}\right), \\ g_s(x_0) &= \exp(iksg(x_0)), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  берутся из представления эйкональной функции  $g(x)$  в окрестности точки  $x_0$ . В дальнейшем этот базис будем использовать для представления решения интегро-дифференциального уравнения.

Следует отметить, что при  $\beta \rightarrow 0$   $V_s^\zeta$  стремится к  $\delta(\zeta - s\alpha)$ .

### 3. Решение интегрального уравнения внутри эталонного ДОО

Рассмотрим теперь решение интегрального уравнения для эталонной диэлектрической проницаемости. Фурье-преобразование для диэлектрической проницаемости эталонного ДОО имеет вид

$$\varepsilon(\zeta) = \sum_m \varepsilon_m V_m^\zeta, \quad (14)$$

$$V_m^\zeta = \sqrt{\frac{ik}{2\pi m\beta}} g_m(x_0) \exp\left(-ik \frac{(\zeta - m\alpha)^2}{2m\beta}\right), \quad (15)$$

$$g_m(x_0) = \exp(ikmg(x_0)),$$

где параметры  $\alpha$  и  $\beta$  берутся из разложения эйкональной функции  $g(x)$  в окрестности точки  $x_0$ .

Подставляем выражение (15) в интегральное уравнение (6), получаем интегральное уравнение для функции  $f^\zeta(z)$

$$\begin{aligned} (d^2 f^\zeta(x_0, z))/dz^2 &= k^2 \zeta^2 f^\zeta(x_0, z) - \\ &- k^2 \sum_m \varepsilon_m \int_{-\infty}^{\infty} f^n(x_0, z) V_m^{\zeta-n} d\eta. \end{aligned} \quad (16)$$

Асимптотический метод решения интегрального уравнения состоит в том, чтобы свести решение исходного интегрального уравнения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Представим искомую функцию в виде суперпозиции базисных функций:

$$f^\zeta(x_0, z) = \sum_s p^s(x_0, z) V_s^\zeta. \quad (17)$$

Представление выбрано по аналогии с представлением в приближении геометрической оптики. Подставляем (17) в интегро-дифференциальное уравнение (16), и учитывая свойство базисных функций

$$V_{s+m}^\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} V_m^{\zeta-n} V_s^n d\eta, \quad (18)$$

получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которую в матричном виде можно записать следующим образом

$$(d^2 p(x_0, z))/dz^2 = -k^2 L p(x_0, z), \quad (19)$$

где  $p(x_0, z)$  – вектор столбец,  $L$  – квадратная матрица, матричные элементы которой имеют вид

$$L_n^m = \varepsilon_{m-n} - \sum_p C_p^m B_n^p, \tag{20}$$

$$\sum_n A_n^m C_k^n = \delta_k^m, \tag{20a}$$

$$A_n^p = \int_{-\infty}^{\infty} V_{\zeta}^p V_n^{\zeta} d\zeta, \tag{20б}$$

$$B_n^p = \int_{-\infty}^{\infty} V_{\zeta}^p \zeta^2 V_n^{\zeta} d\zeta. \tag{20в}$$

Приведенные интегралы вычисляются с помощью асимптотического метода, стационарной фазы. В этой связи результаты расчетов, полученные с помощью данного метода, носят также асимптотический характер.

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$f_1^{\zeta}(z) = \left( I^s \exp(ik\gamma(\varepsilon_1, \zeta)z) + R^s(x_0) \exp(-ik\gamma(\varepsilon_1, \zeta)z) \right) \Big| V_s^{\zeta},$$

$$f_2^{\zeta}(z) = \left( S_p^s(x_0) \exp(ik\mu_p z) a^{+p} + S_p^s(x_0) \exp(-ik\mu_p(z-h)) a^{-p} \right) \Big| V_s^{\zeta}, \tag{22}$$

$$f_3^{\zeta}(z) = T^s(x_0) \exp(ik\gamma(\varepsilon_3, \zeta)(z-h)) \Big| V_s^{\zeta}.$$

Коэффициенты  $T^s$  и  $R^s$  находятся из условия сшивки на обеих границах области 2 функций и их производных по переменной  $z$ . Условие сшивки представляет собой систему функциональных уравнений. Для того чтобы найти коэффициенты, необходимо умножить каждое уравнение на функцию комплексно-сопряженную к  $|V_s^{\zeta}\rangle$  и проинтегрировать. Условие сшивки на границах приводит к системе линейных уравнений. Асимптотический характер метода состоит в том, что эти интегралы берутся методом стационарной фазы или методом перевала. Учитывается только главный член асимптотики. В случае  $\beta \rightarrow 0$  эталонный ДОЭ превращается в периодическую дифракционную решетку, и предлагаемый метод совпадает с методом связанных волн, который используется при решении задач дифракции на периодических структурах.

В координатном представлении поле на выходе ДОЭ точки  $x_0$  имеет вид

$$E^{(3)}(x_0, h) = E_0(x_0) \sum_s T^s(x_0) \exp[iks g(x_0)]. \tag{23}$$

Полученное выражение по форме совпадает с выражением для поля на выходе ДОЭ, полученного в рамках метода предсказания, рассмотренного в работе [21, 22\*]. Сравнивая два этих выражения, мы видим, что функция  $g(x)$  имеет смысл функции эйконала для ДОЭ, рассчитанного в рамках геометрической оптики. Отличие состоит в том, что коэффициент  $T^s(x_0)$  имеет другой физический смысл. Напомним, что в методе предсказания  $T^s(x_0)$  совпадал с коэффициентом разложения в ряд Фурье функции предсказания. В нашем случае он определяется согласно методу, изложенному в предыдущем параграфе настоящей работы.

В заключение следует отметить, что в данном параграфе разработан асимптотический метод решения

$$p(x_0, z) = S \left( \exp(ik\mu z) a^+ + \exp(-ik\mu(z-h)) a^- \right), \tag{21}$$

$$LS = \mu^2 S,$$

где  $h$  – толщина ДОЭ,  $S$  – квадратная матрица собственных векторов,  $\mu$  – диагональная матрица собственных значений и  $a^+$ ,  $a^-$  – матрицы столбцы.

#### 4. Решение задачи дифракции на эталонном ДОЭ

В предыдущем параграфе было получено решение интегрального уравнения внутри ДОЭ. В данном параграфе приведем решение задачи дифракции на эталонной ДОЭ. Для этого запишем поле в пространственно-частотном представлении в трех областях пространства

задач дифракции на одномерных квазипериодических ДОЭ в случае ТЕ-поляризации. Метод основан на решении эталонной задачи дифракции, позволяющей получить асимптотическое представление поля в окрестности некоторой точки  $x_0$  на апертуре ДОЭ. Метод позволяет представить поле в плоскости, прилегающей к ДОЭ, в аналитической форме.

Для того чтобы найти поле на выходе ДОЭ с помощью разработанного метода, необходимо решить задачу в каждой точке апертуры. Однако на практике известно, что для определенных классов ДОЭ значения коэффициентов слабо меняются на апертуре (слабо по сравнению с эйкональной функцией). На практике достаточно решить эталонную задачу в конечном числе точек на апертуре, а в промежуточных точках использовать интерполяцию (линейную, квадратичную, кубическую). Полученное выражение для поля на выходе ДОЭ можно использовать для нахождения поля, формируемого ДОЭ во всем пространстве. Для этого можно использовать интеграл Релея–Зоммерфельда или интеграл Кирхгофа. В результате получаем аналитическое выражение для поля, и его можно будет использовать для вычисления интеграла Релея–Зоммерфельда методом стационарной фазы. Для вычисления поля можно также использовать метод, основанный на совместном решении уравнения эйконала и переноса, который описан в работах, и метод, основанный на трассировке лучей. Это значительно сократит время на решение прямой задачи, а это, в свою очередь, позволит решать обратную задачу синтеза ДОЭ.

#### 5. Регуляризация при освещении Гауссовым пучком

Разложение для функции  $f(\zeta, z)$  неудобно тем, что представлено в виде разложений по функциям  $V_s^{\zeta}$ , которые не убывают на бесконечности. Это значительный недостаток, так как в этом случае невозможно вычислить от нее интеграл или Фурье-преобразование. Формально все интегралы будут расходящимися, так как подынтегральная функция не

стремится к нулю. Для того чтобы избавиться от этого недостатка, осветим эталонный ДОЭ пучком с Гауссовым распределением. В этом случае представим решение в виде разложения

$$f^\zeta(x_0, z) = \sum_s P^s(x_0, z) F_s^\zeta,$$

$$F_m^\zeta = F[E_0(x)g_m(x)],$$

где

$$E_0(x) = \exp(-x^2/2\sigma^2), \quad g_m(x) = \exp(ikmg(x)). \quad (24)$$

Вычисляем интеграл и получаем окончательное выражение для базисной функции

$$F_m^\zeta = F^\zeta[E_0(x)g_m(x)] = E(x_0)g_m(x_0) \times \sqrt{1/2\pi\sigma_m} \exp(-(\zeta - x_m)^2/2\sigma_m), \quad (25)$$

где

$$\sigma_m = (1/k^2\sigma^2 - (im\beta/k)), \quad x_m = (ix_0/k\sigma^2 + m\alpha). \quad (26)$$

Далее делаем шаги, которые были описаны в предыдущем параграфе, и получаем поле на выходе ДОЭ.

### 6. Пример: расчет когерентного электромагнитного поля с помощью асимптотического метода для ТЕ-поляризации

Работоспособность продемонстрирована на задаче дифракции Гауссова пучка, прошедшего через оптический элемент с распределением диэлектрической проницаемости:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) &= \Phi(g(x)), \\ \Phi(g) &= (\varepsilon_{max} + \varepsilon_{min})/2 + ((\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min})/2) \cdot \cos(g), \\ g(x) &= k\sqrt{x^2 + f^2}, \\ x &\in [-D/2, D/2], \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\varepsilon_{min} = 1$ ,  $\varepsilon_{max} = 2,25$ ,  $D = 200\lambda$  – диаметр апертуры оптического элемента. Параметр Гауссова пучка подобран таким образом, чтобы он практически затухал на границе апертуры  $\sigma = D/6$ .

Оптический элемент с указанной диэлектрической проницаемостью представляет собой многофокусную линзу. Один из фокусов находится в фокальной плоскости  $z = f$ .

Поле на выходе оптического элемента рассчитывалось тремя способами: методом связанных волн, в приближении геометрической оптики, с помощью разработанного асимптотического метода.

Для расчетов была разработана программа на языке FORTRAN, которая поддерживала параллельные вычисления.

Для того чтобы использовать метод связанных волн, заменяем исходный ДОЭ периодическим продолжением. Каждый период полученного периодического ДОЭ представляет исходный элемент. Это позволяет использовать для расчета поля метод, который используют для расчета поля от дифракционной решетки.

Максимальное число Фурье-гармоник в методе связанных волн бралось в интервале  $[-N_{max}, N_{max}]$ , где

$$N_{max} = 1, 2 \operatorname{int}(D/\lambda),$$

где  $\operatorname{int}(x)$  – целая часть вещественного числа  $x$ .

Следует отметить, что программа корректно работала и при меньшем числе гармоник. Корректность работы программы контролировалась на основе выполнения закона сохранения энергии. Отношение энергии падающего пучка к сумме энергий падающего и прошедшего составляла 0,9999999.

Поле в приближении геометрической оптики находится следующим образом. В параксиальном приближении фаза поля на выходе в приближении геометрической оптики находится по формуле

$$\varphi(x) = kh\sqrt{\Phi(g(x))}, \quad (28)$$

где  $h$  – высота ДОЭ.

Комплексная амплитуда в плоскости, непосредственно прилегающей к ДОЭ, описывается выражением

$$A(x) = \exp(-x^2/2\sigma^2) \exp(ikh\sqrt{\Phi(g(x))}). \quad (29)$$

Функция  $\Phi(g)$  является периодической с периодом  $2\pi$ , поэтому поле в плоскости, непосредственно прилегающей к ДОЭ, можно разложить в ряд

$$A(x) = \exp(-x^2/2\sigma^2) \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \exp(ikm\sqrt{x^2 + f^2}).$$

Следует отметить, что член с  $m = -1$ , описывает дифракционную линзу с фокусным расстоянием  $f$ . Остальные члены с отрицательными индексами описывают фокусирующие ДОЭ, которые представляют линзы с абберациями. Члены с положительными индексами описывают рассеивающие линзы с абберациями.

Далее, для нахождения поля в пространстве вычислялся интеграл Релея–Зоммерфельда.

Результаты расчетов приведены на рис. 1а – д при различных значениях фокуса  $f$  и расстояний от оптического элемента до плоскости наблюдения  $z$ .

Сплошной линией изображены результаты, полученные с помощью асимптотического метода. Пунктирной линией изображены результаты, полученные с помощью метода связанных волн. Крестиками показаны результаты, полученные без учета дифракции внутри ДОЭ. Анализ рис. 1а – д показывает, что отклонение результатов, полученных при использовании приближения геометрической оптики, от результатов, полученных с помощью строгого метода связанных волн, составляет 3–5% при больших фокусах (100 и 200 длин волн (рис. 1а, б)).

С уменьшением фокусного расстояния (до 50 длин волн (рис. 1г, д)) указанное отклонение возрастает более чем на 110%. При этом ошибка разработанного асимптотического метода для случаев рис. 1а – г составляет 0,6%; 0,7%; 4,3% и 11,6% соответственно. Таким образом, асимптотический метод, в отличие от приближения геометрической оптики для «тонкого» ДОЭ, существенно точнее описывает дифракцию при малых значениях фокуса, чем приближение геометрической оптики.

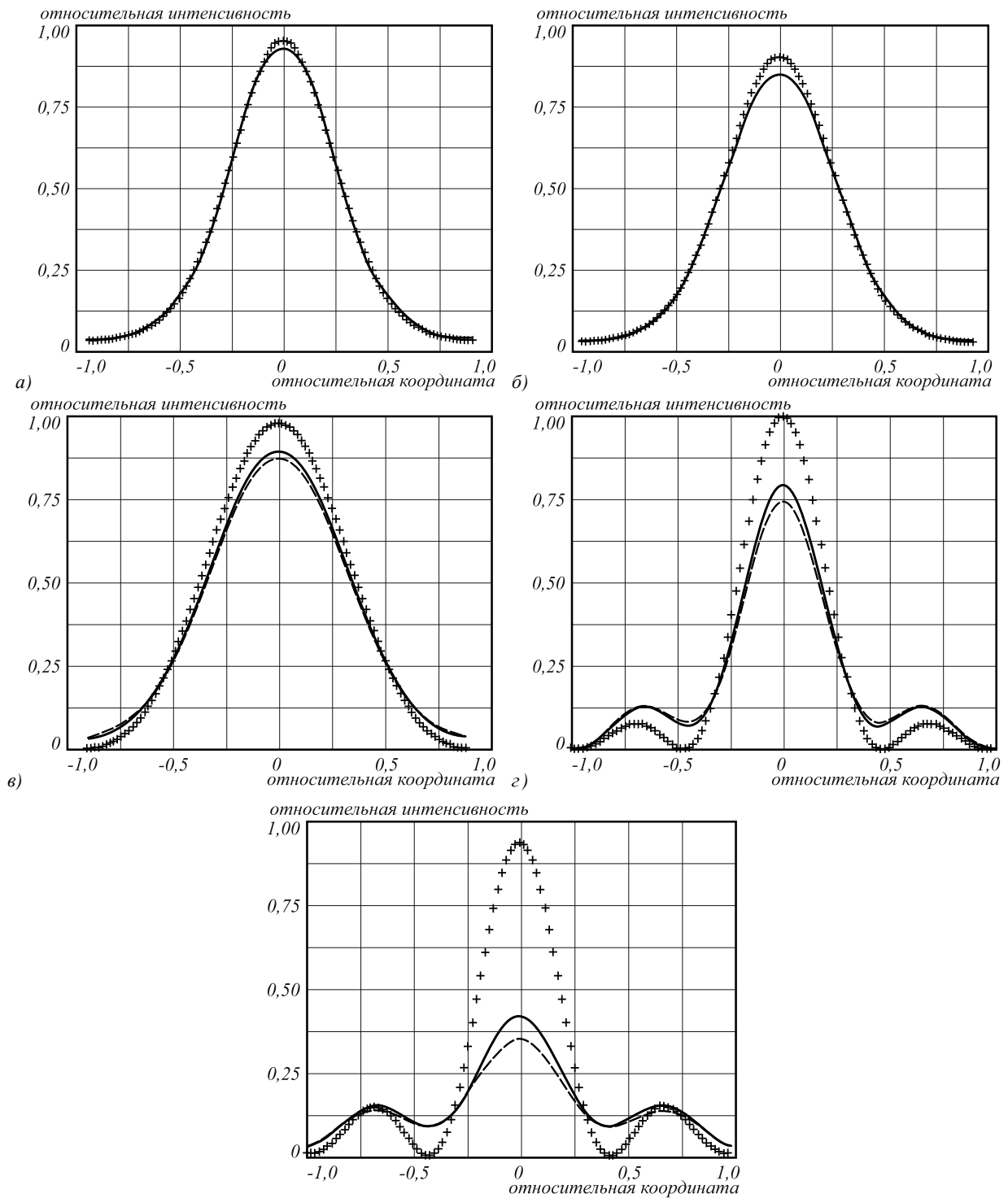


Рис. 1. Распределение интенсивности в фокальной плоскости дифракционной линзы  $z = f$ :  $f = 200\lambda$  (а);  $f = 100\lambda$  (б);  $f = 50\lambda$  (в);  $f = 20\lambda$  (г);  $u z = 1,5f, f = 20\lambda$  (д)

**Заключение**

В данной работе решена задача дифракции для ТЕ-поляризованных волн. Подход, использованный в работе, позволяет предложить методы решения, которые впоследствии можно будет распространить на случай трех измерений и поверхностных структур [15]. Он является промежуточным между приближением Кирхгофа (в рамках приближения Кирхгофа по-

ле на выходе элемента рассчитывается в рамках геометрической оптики) и методами, основанными на использовании строгого электромагнитного подхода.

Разработанный метод позволит эффективно решать обратные задачи расчета ДОЭ.

**Благодарности**

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-31-00014).

*Литература*

1. **Doskolovich, L.L.** Focusators for laser-branding / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, G.V. Usplenjev // Optics and Lasers in Engineering. – 1991. – Vol. 15, Issue 5. – P. 311-322. – DOI: 10.1016/0143-8166(91)90018-0.
2. **Golub, M.A.** Computer generated diffractive multi-focal lens / M.A. Golub, L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, V.A. Soifer // Journal of Modern Optics. – 1992. – Vol. 39, Issue 6. – P. 1245-1251. – DOI: 10.1080/713823549.
3. **Kazanskiy, N.L.** Simulation of DOE-aided focusing devices / N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, V.A. Soifer // Optical Memory & Neural Networks. – 2000. – Vol. 9, Issue 3. – P. 191-200.
4. **Kazanskiy, N.L.** Investigation of Lighting Devices Based on Diffractive Optical Elements / N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, V.A. Soifer, A.V. Volkov // Optical Memory & Neural Networks. – 2000. – Vol. 9, Issue 4. – P. 301-312.
5. **Doskolovich, L.L.** A gradient method for design of varied-depth binary diffraction grating / L.L. Doskolovich, S.I. Kharitonov, O.I. Petrova, V.A. Soifer // Optics and Lasers in Engineering. – 1998. – Vol. 29, Issues 4-5. – P. 249-259. – DOI: 10.1016/S0143-8166(97)00113-9.
6. **Doskolovich, L.L.** Design of lenses for the focusing into a line / L.L. Doskolovich, C. Bigliatti, S.I. Kharitonov, O.I. Petrova // Компьютерная оптика. – 2000. – Вып. 20. – С. 29-34.
7. **Безус, Е.А.** Расчет дифракционных структур для фокусировки поверхностных электромагнитных волн / Е.А. Безус, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, В.А. Сойфер, С.И. Харитонов, М. Пицци, П. Перло // Компьютерная оптика. – 2009. – Т. 33, № 2. – С. 185-192.
8. **Голуб, М.А.** Дифракционный расчет оптического элемента, фокусирующего в кольцо / М.А. Голуб, Н.Л. Казанский, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер, С.И. Харитонов // Автометрия. – 1987. – Вып. 6. – С. 8-15.
9. **Голуб, М.А.** Оценка дифракционного размытия фокальной линии геометрических фокусаторов / М.А. Голуб, Н.Л. Казанский, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер, С.И. Харитонов // Компьютерная оптика. – 1989. – Вып. 5. – С. 34-38.
10. **Голуб, М.А.** Дифракционный расчет интенсивности поля вблизи фокальной линии фокусатора / М.А. Голуб, Н.Л. Казанский, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер, С.И. Харитонов // Оптика и спектроскопия. – 1989. – Т. 67, № 6. – С. 1387-1389.
11. **Голуб, М.А.** Применение методов псевдогеометрической оптики для расчета полей от дифракционных оптических элементов / М.А. Голуб, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, В.А. Сойфер, С.И. Харитонов // Научное приборостроение. – 1993. – Т. 3, № 1. – С. 43-51.
12. **Kazanskiy, N.L.** Application of a pseudogeometrical optical approach for calculation of the field formed by a focusator / N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, V.A. Soifer // Optics & Laser Technology. – 1996. – Vol. 28, Issue 4. – P. 297-300. – DOI: 10.1016/0030-3992(95)00103-4.
13. **Дмитриев, А.Ю.** Асимптотический расчет светового поля, формируемого дифракционным оптическим элементом для фокусировки в линию / А.Ю. Дмитриев, Л.Л. Досколович, С.И. Харитонов // Компьютерная оптика. – 2008. – Т. 32, № 2. – С. 195-200.
14. **Харитонов, С.И.** Асимптотические решения скалярного волнового уравнения / С.И. Харитонов, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский // Компьютерная оптика. – 2003. – Вып. 25. – С. 49-53.
15. **Досколович, Л.Л.** Асимптотические решения уравнения Гельмгольца для псевдопериодических структур / Л.Л. Досколович, С.И. Харитонов, Н.Л. Казанский, Е.А. Тулупова, С.А. Скуратов // Компьютерная оптика. – 2005. – Вып. 27. – С. 50-55.
16. **Досколович, Л.Л.** Асимптотические методы для решения задач дифракции на ДОО / Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, М.А. Моисеев, С.И. Харитонов // Компьютерная оптика. – 2006. – Вып. 30. – С. 49-52.
17. **Guizal, B.** Electromagnetic beam diffraction by a finite lamellar structure: an aperiodic coupled-wave method / B. Guizal, D. Barchiesi, D. Felbacq // Journal of the Optical Society of America A. – 2003. – Vol. 20, Issue 12. – P. 2274-2280. – DOI: 10.1364/JOSAA.20.002274.
18. **Häyrynen, T.** Open-geometry Fourier modal method: modeling nanophotonic structures in infinite domains / T. Häyrynen, J.R. de Lasson, N. Gregersen // Journal of the Optical Society of America A. – 2016. – Vol. 33, Issue 7. – P. 1298-1306. – DOI: 10.1364/JOSAA.33.001298.
19. **Казанский, Н.Л.** Компактная запись решений системы уравнений Максвелла в пространственно-частотном представлении / Н.Л. Казанский, М.Л. Каляев, С.И. Харитонов // Антенны. – 2007. – № 10. – С. 13-21.
20. **Харитонов, С.И.** Асимптотический метод расчета поля от оптических элементов, обладающих зонной структурой / С.И. Харитонов, Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, М.Л. Каляев // Компьютерная оптика. – 2007. – Т. 31, № 4. – С. 7-18.
21. **Досколович, Л.Л.** Интегральные представления решений системы уравнений Максвелла для анизотропных сред / Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, С.И. Харитонов // Компьютерная оптика. – 2010. – Т. 34, № 1. – С. 52-57.
22. **Досколович, Л.Л.** Интегральные представления решений уравнений Максвелла в виде спектра поверхностных электромагнитных волн / Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, С.И. Харитонов // Компьютерная оптика. – 2008. – Т. 32, № 2. – С. 151-154.
23. **Досколович, Л.Л.** Нелинейное предсказание фазы для фокусировки в систему фокальных линий / Л.Л. Досколович, Н.Л. Казанский, В.А. Сойфер, С.И. Харитонов // Научное приборостроение. – 1993. – Т. 3, № 1. – С. 24-37.
24. **Doskolovich, L.L.** A method for estimating the DOE's energy efficiency / L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, A.Ye. Tzaregorodzev // Optics and Laser Technology. – 1995. – Vol. 27, Issue 4. – P. 219-221. – DOI: 10.1016/0030-3992(95)93748-G.

*Сведения об авторах*

**Харитонов Сергей Иванович**, 1961 года рождения. Доктор физико-математических наук, доцент кафедры технической кибернетики, старший научный сотрудник лаборатории дифракционной оптики Института систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН) – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. 1984 г. – окончил физический факультет Самарского государственного университета. 1993 г. – защитил кандидатскую диссертацию на тему «Асимптотические методы дифракционного расчёта фокусаторов лазерного излучения». 2010 г. – защитил докторскую диссертацию на тему «Асимптотические методы расчёта дифракции когерентного электромагнитного излучения на дифракционных оптических элементах». Область научных интересов: дифракционная, квантовая оптика, физика плазмы. В списке научных работ С.И. Харитонova 87 статей, 5 авторских свидетельств и патентов. E-mail: [prognoz2007@gmail.com](mailto:prognoz2007@gmail.com).

**Досколович Леонид Леонидович**, в 1989 году с отличием окончил Куйбышевский авиационный институт (КуАИ, ныне – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2001 год), профессор, работает заведующим лабораторией дифракционной оптики Института систем обработки изображений РАН (ИСОИ РАН) – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, профессором кафедры технической кибернетики Самарского университета и ведущим научным сотрудником научно-исследовательской лаборатории прорывных технологий дистанционного зондирования Земли Самарского университета. Специалист в области дифракционной оптики, лазерных информационных технологий, нанофотоники. E-mail: [leonid@smr.ru](mailto:leonid@smr.ru).

**Казанский Николай Львович**, 1958 года рождения. В 1981 году с отличием окончил Куйбышевский авиационный институт (КуАИ, ныне – Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (1996 год), профессор, работает руководителем Института систем обработки изображений РАН – филиала Федерального научно-исследовательского центра «Кристаллография и фотоника» Российской академии наук (ИСОИ РАН), профессором кафедры технической кибернетики Самарского университета. Ведущий научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории прорывных технологий дистанционного зондирования Земли в Самарском университете, заведующий базовой (Самарского университета в ИСОИ РАН) кафедрой высокопроизводительных вычислений. Является членом международных научных обществ OSA, SPIE и IAPR. Н.Л. Казанский – специалист в области дифракционной оптики, математического моделирования, обработки изображений и нанофотоники. В списке научных работ Н.Л. Казанского 290 статей, 12 монографий, 53 авторских свидетельства и патента. Страница в интернете: <http://www.ipsi.smr.ru/staff/kazanskiy.htm>, E-mail: [kazanskiy@ssau.ru](mailto:kazanskiy@ssau.ru).

ГРНТИ: 29.31.29.

Поступила в редакцию 11 ноября 2016 г. Окончательный вариант – 22 марта 2017 г.

## ASYMPTOTIC METHODS OF SOLVING PROBLEMS OF DIFFRACTION BY NON-PERIODIC STRUCTURES

S.I. Kharitonov<sup>1,2</sup>, L.L. Doskolovich<sup>1,2</sup>, N.L. Kazanskiy<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Image Processing Systems Institute of RAS, – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia,

<sup>2</sup>Samara National Research University, Samara, Russia

### Abstract

An asymptotic method for calculating the complex amplitude of a light field in the case of diffraction by non-periodic band gap structures. The novelty of the approach consists in the expansion of the solution of the integral equation into a basis that describes the propagation of light through a DOE within the geometrical optics approximation and changes into a basis of plane waves used in the calculation of diffraction gratings. We present the results of focusing into a point by a gradient-index diffractive optical element with a band-gap structure. Simulation results confirm the efficiency of the proposed method.

**Keywords:** diffractive optical element (DOE), asymptotic method, coupled-wave analysis, aperiodic structure, quasi-periodic structure, microrelief.

**Citation:** Kharitonov SI, Doskolovich LL, Kazanskiy NL. Asymptotic methods for solving problems of diffraction by non-periodic structures. *Computer Optics* 2017; 41(2): 160-168. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-2-160-168.

**Acknowledgements:** Work performed by a grant from the Russian Science Foundation (Project № 14-31-00014).

### References

- [1] Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Usplenjev GV. Focusators for laser-branding. *Optics and Lasers in Engineering* 1991; 15(5): 311-322. DOI: 10.1016/0143-8166(91)90018-0.
- [2] Golub MA, Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Soifer VA. Computer generated diffractive multi-focal lens. *Journal of Modern Optics* 1992; 39(6): 1245-1251. DOI: 10.1080/713823549.
- [3] Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Soifer VA. Simulation of DOE-aided focusing devices. *Optical Memory & Neural Networks* 2000; 9(3): 191-200.
- [4] Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Soifer VA, Volkov AV. Investigation of Lighting Devices Based on Diffractive Optical Elements. *Optical Memory & Neural Networks* 2000; 9(4): 301-312.
- [5] Doskolovich LL, Kharitonov SI, Petrova OI, Soifer VA. A gradient method for design of varied - depth binary diffraction grating. *Optics and Lasers in Engineering* 1998; 29(4-5): 249-259. DOI: 10.1016/S0143-8166(97)00113-9.
- [6] Doskolovich LL, Bigliatti S, Kharitonov SI, Petrova OI. Design of lenses for the focusing into a line [In Russian]. *Computer Optics* 2000; 20: 29-34.
- [7] Bezus EA, Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Soifer VA, Kharitonov SI, Pizzi M, Perlo P. The design of the diffractive optical elements to focus surface plasmons [In Russian]. *Computer Optics* 2009; 33(2): 185-192.
- [8] Golub MA, Kazanskiy NL, Sissakian IN, Soifer VA, Kharitonov SI. Diffraction calculation for an optical element which focuses into a ring. *Optoelectronics, Instrumentation, and Data Processing* 1987; 23(6): 7-14.
- [9] Golub MA, Kazanskiy NL, Sissakian IN, Soifer VA, Kharitonov SI. Evaluation of the diffraction blur focal-term line



- geometroopticheskikh focusators [In Russian]. Computer Optics 1989; 5: 34-38.
- [10] Golub MA, Kazanskii NL, Sisakiyan IN, Soifer VA, Kharitonov SI. Diffraction calculation of the field intensity near the focal line of a focuser. Optics and Spektroskopy 1989; 67(6): 814-815.
- [11] Golub MA, Doskolovich LL, Kazansky NL, Soifer VA, Kharitonov SI. Application of Pseudo optics to calculate the fields of diffractive optical elements [In Russian]. Scientific Instrument 1993; 3(1): 38-46.
- [12] Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Soifer VA. Application of a pseudogeometrical optical approach for calculation of the field formed by a focusator. Optics & Laser Technology 1996; 28(4): 297-300. DOI: 10.1016/0030-3992(95)00103-4.
- [13] Dmitriev AYu, Doskolovich LL, Kharitonov SI. Asymptotic computation of the light field intensity for a diffractive optical element to focus into a line [In Russian]. Computer Optics 2008; 32(2): 195-200.
- [14] Kharitonov SI, Doskolovich LL, Kazanskiy NL. The asymptotic solution of the scalar wave equation [In Russian]. Computer Optics 2003; 25: 49-53.
- [15] Doskolovich LL, Kharitonov SI, Kazanskiy NL, Tulupova EA, Skuratov SA. Asymptotic solutions of the Helmholtz equation for pseudoperiodic structures [In Russian]. Computer Optics 2005; 27: 50-55.
- [16] Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Moses MA, Kharitonov SI. Asymptotic methods for solving problems of diffraction by the DOE [In Russian]. Computer Optics 2006; 30: 49-52.
- [17] Guizal B, Barchiesi D, Felbacq D. Electromagnetic beam diffraction by a finite lamellar structure: an aperiodic coupled-wave method. J Opt Soc Am A 2003; 20(12): 2274-2280. DOI: 10.1364/JOSAA.20.002274.
- [18] Häyrynen T, de Lasson JR, Gregersen N. Open-geometry Fourier modal method: modeling nanophotonic structures in infinite domains. J Opt Soc Am A 2016; 33(7): 1298-1306. DOI: 10.1364/JOSAA.33.001298.
- [19] Kazanskiy NL, Kalyaev ML, Kharitonov SI. Compact notation of Maxwell's set of equations in the spatial-frequency representation [In Russian]. Antennas 2007, 10: 13-21.
- [20] Kharitonov SI, Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Kalyaev ML. The asymptotic method of calculation of the field of optical elements with the structure of the band-swarm [In Russian]. Computer Optics 2007; 31(4): 7-18.
- [21] Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Kharitonov SI. Integral representations of solutions of Maxwell's equations for anisotropic media [In Russian]. Computer Optics 2010; 34(1): 52-57.
- [22] Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Kharitonov SI. Solutions of Maxwell's equations in the integral form of a spectrum of surface plasmons [In Russian]. Computer Optics 2008; 32(2): 151-154.
- [23] Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Soifer VA, Kharitonov SI. The non-linear pre-emphasis phase to focus in the focal line [In Russian]. Scientific Instrument 1993; 3(1): 24-37.
- [24] Doskolovich LL, Kazanskiy NL, Kharitonov SI, Tzaregorodtzev AYe. A method for estimating the DOE's energy efficiency. Optics and Laser Technology 1995; 27(4): 219-221. DOI: 10.1016/0030-3992(95)93748-G.

#### Authors' information

**Sergey Ivanovich Kharitonov** (b.1961), Senior Researcher of Diffractive Optics laboratory of the Image Processing Systems Institute RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, Doctor of Physical and Mathematical Sciences. 1984 – graduated from Physics department of Samara State University. 1993 – defended his dissertation "Asymptotic methods of calculation of the diffraction of laser radiation focuser". 2010 – defended his doctoral thesis on "Asymptotic methods for calculating the diffraction of coherent electromagnetic radiation in diffractive optical elements". Research interests: diffraction, quantum optics, plasma physics. The S.I. Kharitonov's list of scientific papers include 87 articles, 5 patents. E-mail: [prognoz2007@gmail.com](mailto:prognoz2007@gmail.com).

**Leonid Leonidovich Doskolovich** (b. 1966) graduated with honours (1989) from S.P. Korolyov Kuibyshev Aviation Institute (presently, Samara National Research University), majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths (2001) degree from Samara State Aerospace University. Laboratory chief in the Image Processing Systems Institute RAS – Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, professor at SSAU's Technical Cybernetics subdepartment, the senior researcher at the Breakthrough Technologies for Earth's Remote Sensing laboratory at SSAU. His leading research interests include diffractive optics, laser in-formation technologies, and nanophotonics. E-mail: [leonid@smr.ru](mailto:leonid@smr.ru).

**Nikolay Lvovich Kazanskiy** (b. 1958), graduated with honours (1981) from S.P. Korolyov Kuibyshev Aviation Institute (presently, S.P. Korolyov Samara National Research University), majoring in Applied Mathematics. He received his Candidate in Physics & Maths (1988) and Doctor in Physics & Maths (1996) degrees from Samara University. He is the director of Image Processing Systems Institute of the Russian Academy of Sciences (IPSI RAS), also holding a part-time position of a professor at Technical Cybernetics sub-department of Samara University, a leading researcher at the laboratory of Advanced Technologies for Earth Remote Sensing at Samara University, holding the chair at the sub-department of High-Performance Computing at IPSI RAS. He is an OSA-, SPIE- and IAPR-member. He is co-author of 290 scientific papers, 12 monographs, 53 inventions and patents. His current research interests include diffractive optics, mathematical modeling, image processing, and nanophotonics. Website: <http://www.ipsi.smr.ru/staff/kazanskiy.htm>. E-mail: [kazanskiy@ssau.ru](mailto:kazanskiy@ssau.ru).

Received November 11, 2016. The final version – March 22, 2017.