

ОРБИТАЛЬНЫЙ УГЛОВОЙ МОМЕНТ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПТИЧЕСКОГО ВИХРЯ, ВНЕДРЁННОГО В ГАУССОВ ПУЧОК

В.В. Котляр^{1,2}, А.А. Ковалёв^{1,2}, А.П. Порфирьев^{1,2}

¹ Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия,

² Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия

Аннотация

Рассмотрен эллиптический оптический вихрь, внедрённый в Гауссов пучок. Получены явные замкнутые выражения для комплексной амплитуды и нормированного орбитального углового момента такого пучка. Показано, что эллиптический Гауссовый вихрь обладает дробным ОУМ, максимальное значение которого, равное топологическому заряду обычного Гауссова вихря n , достигается при отсутствии эллиптичности у вихря. Большая ось эллипса интенсивности в сечении пучка вращается при распространении и поворачивается на 90 градусов от начальной плоскости до фокальной плоскости сферической линзы. На большой оси эллипса интенсивности находятся n нулей интенсивности эллиптического Гауссова вихря, расстояние между которыми меняется как при распространении пучка, так и при изменении степени эллиптичности. Расстояние между нулями интенсивности максимальное в фокальной плоскости при постоянной степени эллиптичности. При отсутствии эллиптичности все нули «собираются» в один осевой n -вырожденный ноль интенсивности. Экспериментальные результаты согласуются с теорией.

Ключевые слова: орбитальный угловой момент, оптический вихрь, Гауссов пучок, эллиптический оптический вихрь.

Цитирование: Котляр, В.В. Орбитальный угловой момент эллиптического оптического вихря, внедрённого в Гауссов пучок / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев // Компьютерная оптика. – 2017. – Т. 41, № 3. – С. 330-337. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-3-330-337.

Введение

Оптические вихри, не обладающие радиальной симметрией и имеющие дробный орбитальный угловой момент (ОУМ), интенсивно изучаются в последние несколько лет. Это связано с тем, что оптические вихри с дробным ОУМ используются в квантовой информатике для генерации фотонов в перепутанных состояниях по ОУМ [1–3]. При этом достигается максимальная степень защищённости квантовой линии связи.

Получить оптический вихрь с дробным ОУМ можно разными путями. Например, с помощью смещения центра Гауссова пучка из центра спиральной фазовой пластинки (СФП) [4] или из центра амплитудного оптического вихря [5]. Или с помощью формирования асимметричных оптических вихрей с распределением интенсивности в виде полумесяца [6, 7]. Но в этом случае траектория, по которой будут вращаться микрочастицы, будет разомкнута. Интересно рассмотреть случай, когда и ОУМ дробный, и кривая интенсивности вихревого пучка в поперечной плоскости замкнута. Проще всего это сделать с помощью формирования эллиптического оптического вихря. В [8] исследуется трансформация оптического вихря с помощью внесения в него разной степени эллиптичности. Эта работа [8] продолжает более ранние работы по исследованию эллиптических оптических вихрей [9, 10]. Но в [8–10] не исследовался ОУМ эллиптических вихрей. Ближе всего к данной работе работа [11]. В [11] рассмотрен эллиптический вихревой пучок Эрмита–Гаусса и рассчитан его ОУМ, который оказался дробным. Однако, чтобы на практике сформировать такой пучок, надо использовать эллиптиче-

ский Гауссов пучок в качестве падающего на амплитудно-фазовый оптический элемент. Но совмещение в одном элементе заданных амплитуды и фазы составляет трудную задачу.

В данной работе рассмотрена задача, которая просто реализуется на практике, по сравнению с [11]. Получена формула для ОУМ Гауссова пучка, в который внедрён эллиптический оптический вихрь с n -кратно вырожденным нулём интенсивности на оптической оси (в центре Гауссова пучка). В отличие от [11], где ОУМ возрастал, если увеличивалась степень эллиптичности Гауссова пучка, в данной работе ОУМ, наоборот, уменьшается с ростом степени эллиптичности внедрённого оптического вихря. Отличие рассмотренного в данной работе оптического вихря от вихря в [11] ещё в том, что в [11] пучок сохраняет при распространении свой вид (с точностью до масштаба) и в любой поперечной плоскости его распределение интенсивности имеет вид эллипса с n изолированными нулями. Вихревой пучок, рассмотренный в данной работе, также имеет распределение интенсивности в виде эллипса, который вращается при распространении, и у которого нули интенсивности, лежащие на большой оси эллипса, проявляются только в фокальной плоскости сферической линзы.

1. Вычисление орбитального углового момента

Рассмотрим изолированный n -кратно вырожденный эллиптический ноль интенсивности, расположенный в начале координат и описываемый функцией

$$T(x, y) = (\alpha x + iy)^n, \quad (1)$$

где n – целый топологический заряд оптического вихря, α – безразмерный параметр, задающий эллиптичность нуля интенсивности: если $\alpha < 1$, то эллипс интенсивности вблизи нуля вытянут вдоль оси x , если $\alpha > 1$ – то вдоль оси y , если $\alpha < 0$, то фаза оптического вихря вращается при распространении по часовой стрелке, если $\alpha > 0$ – то против часовой.

Пусть ноль интенсивности (1) внедрён в перетяжку Гауссова пучка так, что комплексная амплитуда светового поля в начальной плоскости имеет вид:

$$E(x, y, z = 0) = (\alpha x + iy)^n \exp(-(x^2 + y^2)/2w^2), \quad (2)$$

где w – радиус перетяжки Гауссова пучка. Найдём ОУМ и мощность (энергию) параксиального поля по известным формулам [4, 7]:

$$J_z = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) E(x, y) dx dy, \quad (3)$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) E(x, y) dx dy, \quad (4)$$

где Im – мнимая часть комплексного числа, \bar{E} – сопряжённая комплексная амплитуда. Вместо (3) и (4), для поля (2) получим:

$$J_z = \alpha n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x^2 + y^2)/w^2) \times (\alpha^2 x^2 + y^2)^{n-1} (x^2 + y^2) dx dy, \quad (5)$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-(x^2 + y^2)/w^2) (\alpha^2 x^2 + y^2)^n dx dy. \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что при отсутствии эллиптичности нуля интенсивности ($\alpha = 1$) получается хорошо известный нормированный ОУМ, равный топологическому заряду вихря:

$$J_z/W = n. \quad (7)$$

Если $\alpha = -1$, то знак в (7) меняется на противоположный: $J_z/W = -n$. Интегралы (5) и (6) можно вычислить с помощью интеграла:

$$I_m = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w^2}\right) (\alpha^2 x^2 + y^2)^m dx dy, \quad (8)$$

так как ОУМ (5) и мощность (6) связаны с интегралом (8) простыми соотношениями:

$$J_z = -\alpha n \frac{\partial(I_{m=n-1})}{\partial(w^{-2})}, \quad W = I_{m=n}. \quad (9)$$

Интеграл (8) вычисляется с помощью разложения по биному Ньютона

$$(\alpha x + iy)^n = \sum_{l=0}^n \frac{n!}{l!(n-l)!} (\alpha x)^l (iy)^{n-l} \quad (10)$$

и использования простого интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2l} \exp(-px^2) dx = \sqrt{\pi} 2^{-l} (2l-1)!! p^{-(2l+1)/2}, \quad (11)$$

где $(2l-1)!!$ – факториал только по нечётным целым числам. Применяя (10) и (11) к интегралу (8) и с учётом (9), вместо (5) и (6) получим:

$$J_z = (\pi \alpha n^2 w^{2n+2} / 2^{n-1}) A_{n-1}, \quad W = (\pi w^{2n+2} / 2^n) A_n, \quad (12)$$

где

$$A_n = \sum_{l=0}^n \frac{n!(2l-1)!!(2n-2l-1)!!}{l!(n-l)!} \alpha^{2l}. \quad (13)$$

Из (12) следует, что нормированный ОУМ поля (2) имеет вид:

$$J_z/W = 2\alpha n^2 A_{n-1}/A_n. \quad (14)$$

Из (14) сложно сделать определённые выводы, поэтому приведём несколько более простых выражений для нормированного ОУМ для топологических зарядов $n = 1, 2, 3$:

$$(J_z/W)|_{n=1} = 2\alpha/(1+\alpha^2), \quad (15)$$

$$(J_z/W)|_{n=2} = 8\alpha(1+\alpha^2)/(3+2\alpha^2+3\alpha^4), \quad (16)$$

$$\frac{J_z}{W}|_{n=3} = \frac{6\alpha(3+2\alpha^2+3\alpha^4)}{5+3\alpha^2+3\alpha^4+5\alpha^6}. \quad (17)$$

Из (15)–(17) видно, что ОУМ эллиптического вихря (2) дробный и меньше топологического заряда и при $\alpha < 1$, и при $\alpha > 1$. То есть без доказательства можно записать, что ($\alpha > 0$):

$$J_z/W = 2\alpha n^2 A_{n-1}/A_n \leq n. \quad (18)$$

Можно также показать, что нормированный ОУМ может быть выражен более компактно через полиномы Лежандра:

$$J_z/W = n P_{n-1}(s)/P_n(s),$$

где $s = (1 + \alpha^2)/(2\alpha)$. Так как $P_n(1) = 1$ при любом значении n , для круглого Гауссова вихря ($\alpha = 1$) получается хорошо известное свойство, что нормированный ОУМ равен топологическому заряду. Используя свойства полиномов Лежандра [12], можно доказать, что $P_n(\xi) > P_{n-1}(\xi)$ при любых значениях аргумента $\xi > 1$. Так как значение s всегда не меньше единицы, это неравенство доказывает неравенство (18). Это неравенство означает, что, наряду со смещением Гауссова пучка, рассмотренного в [5], его растяжение также не позволяет увеличить орбитальный угловой момент.

Заметим, что равенство в (18) достигается при $\alpha = 1$. Физически объяснить, почему ОУМ уменьшается при замене обычного радиально-симметричного вихря на эллиптический вихрь (1), можно следующим образом. Там, где оптический вихрь удлиняется, он попадает в область меньшей амплитуды Гауссова пучка, и вклад этой «удлинённой» части оптического вихря в общий ОУМ уменьшается. Из (15)–(17) также следует, что при определённых значениях α ОУМ становится равным целому числу $m < n$. То есть, меняя степень эллиптичности изолированного нуля интенсивности (1) α от 0 до 1, можно получить оптический вихрь с любым нормированным ОУМ от 0 до n .

2. Вычисление комплексной амплитуды поля

Комплексную амплитуду светового поля (2) на произвольном расстоянии z можно вычислить с помощью преобразования Френеля. Добавим к полю (2) пропускание тонкой сферической линзы в параксиальном приближении:

$$F(x, y) = \exp\left[-(ik/2f)(x^2 + y^2)\right], \tag{19}$$

где f – фокусное расстояние тонкой линзы, k – волновое число. Тогда комплексная амплитуда эллиптического Гауссова вихря (2) после сферической линзы (19) будет вычисляться с помощью интегрального выражения:

$$E(\xi, \eta, z) = \left(\frac{-ik}{2\pi z}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(x, y, z=0) F(x, y) \times \exp\left[(ik/2z)\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}\right] dx dy. \tag{20}$$

Интеграл (20) можно вычислить с помощью суммы (10) и двух справочных соотношений [12]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \exp(-Ax^2 - Bx) dx = \sqrt{\pi} (i/2)^m A^{-(m+1)/2} \exp(B^2/4A) H_m(iB/2\sqrt{A}), \tag{21}$$

$$\sum_{l=0}^m \frac{m! t^l}{l!(m-l)!} H_l(X) H_{m-l}(Y) = (1+t^2)^{m/2} H_m((tX+Y)/\sqrt{1+t^2}), \tag{22}$$

где $H_m(x)$ – многочлен Эрмита. Тогда вместо (20) получим ($\alpha > 1$):

$$E(\xi, \eta, z) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \left(\frac{-ik}{2z}\right) \left(\frac{\sqrt{2}w}{1+iz_0/z}\right)^{n+2} \times \exp\left[-\frac{\xi^2 + \eta^2}{P^2} + \frac{ik}{2S}(\xi^2 + \eta^2)\right] \times (1-\alpha^2)^{n/2} H_n(Q(R+iI)), \tag{23}$$

где

$$P = \frac{\sqrt{2}wz}{z_0} \sqrt{1 + \frac{z_0^2}{z_1^2}}, \quad S = z \left[1 + \left(\frac{z}{z_1} \left(1 + \frac{z_1^2}{z_0^2} \right) \right)^{-1} \right]^{-1}, \tag{24}$$

$$z_1 = zf/(z-f), \quad z_0 = kw^2,$$

$$Q = (kw/\sqrt{2z})(\alpha^2 - 1)^{-1/2} (1 + z_0^2/z_1^2)^{-1/4},$$

$$I = \eta \cos \psi - \alpha \xi \sin \psi, \quad R = -\alpha \xi \cos \psi - \eta \sin \psi,$$

$$\psi = 0,5 \arctan(z_0/z_1).$$

Из (23) и (24) следует, что аргумент многочлена Эрмита будет действительным только на некоторой прямой в поперечной плоскости, удовлетворяющей уравнению:

$$\eta = \alpha \xi \operatorname{tg}(\psi). \tag{25}$$

Из (25) следует, что при $z=0$ получим $z_1=0$ и $\psi=\pi/4$, то есть прямая (25) наклонена (тангенс угла наклона равен α). И наоборот, при $z=f$ получим $z_1 \rightarrow \infty$ и $\psi=0$, то есть наклон прямой (25) горизонтальный. При других расстояниях $0 < z < f$ прямая (25) постепенно поворачивается из вертикального положения в горизонтальное. На этой прямой, на которой аргумент многочлена Эрмита действительный, лежат корни многочлена Эрмита (нули интенсивности поля (23)). Приравняв действительную часть аргумента многочлена Эрмита в (23) значению корня γ_n , где $H_n(\gamma_n)=0$, и с учётом (25) получим уравнение для координат нулей интенсивности по горизонтальной оси ξ (координаты нулей по вертикальной оси следуют из (25)):

$$\xi_n = -\frac{\sqrt{2}\gamma_n z \sqrt{\alpha^2 - 1} (1 + z_0^2/z_1^2)^{1/4}}{\alpha kw} \cos(\psi). \tag{26}$$

Из (26) следует, что при $\alpha=1$ у функции (23) только один нуль интенсивности $\xi_n=0$. При малом z и $\alpha > 1$ нули интенсивности (26) расположены близко друг к другу. Максимальное расстояние между корнями (26) в фокусе линзы при $z=f$:

$$\xi_n = -\sqrt{2}\gamma_n f \sqrt{\alpha^2 - 1} / \alpha kw. \tag{27}$$

Из (27) следует, что расстояние между нулями интенсивности поля (23), лежащими на горизонтальной прямой в фокальной плоскости сферической линзы (19), зависит от величины эллиптичности оптического вихря α . При $\alpha=1$ расстояние между нулями интенсивности равно нулю, а при $\alpha \rightarrow \infty$ оно максимальное и равно:

$$\xi_n = -\sqrt{2}\gamma_n f / kw. \tag{28}$$

Заметим, что если в качестве параметра эллиптичности оптического вихря (1) выбрать обратную величину $\beta = 1/\alpha$, то вместо (27) получим выражение:

$$\xi_n = -\sqrt{2}\gamma_n f \sqrt{1 - \beta^2} / kw, \tag{29}$$

из которого следует, что при $\beta=1$ расстояние между нулями интенсивности равно нулю (имеется только один ноль в начале координат в фокальной плоскости линзы), а при $\beta=0$ расстояние между нулями максимальное и равно (28).

3. Эксперимент по формированию эллиптического Гауссова вихря

В эксперименте линейно-поляризованный Гауссов пучок с диаметром перетяжки, равным $2w=2,7$ мм, освещал под углом, близким к нормальному, эллиптическую спиральную фазовую пластинку с пропусканием

$$V(r, \varphi) = \exp(in\varphi), \tag{30}$$

где $\varphi = \arctan[(c_y y)/(c_x x)]$. Отношение $c_y/c_x = \beta = 1/\alpha$ принимало значения 0,1; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1. Хотя функция (30) отличается от (1), но топологический заряд обоих оптических вихрей при равном n и α одинаковый. Поэтому поведение обоих вихрей похоже.

Схема эксперимента показана на рис. 1. В качестве источника излучения был выбран твердотельный лазер L ($\lambda = 532$ нм), формирующий фундаментальный Гауссов пучок. Пучок лазера, расширенный и сконструированный с помощью системы, состоящей из пинхола PH (размер отверстия 40 мкм) и линзы L_1 ($f_1 = 250$ мм), падал на дисплей модулятора SLM (PLUTO VIS, разрешение 1920×1080 пикселей, размер пикселя 8 мкм). Диффрагма D_1 была использована для того, чтобы отделить центральное светлое пятно от окружающих его светлых и тёмных колец, возникающих при дифракции на пинхоле. Далее с помощью системы линз L_2 ($f_2 = 350$ мм) и L_3 ($f_3 = 150$ мм) и диффрагмы D_2 мы осуществляли пространственную фильтрацию промодулированного по фазе лазерного пучка, отражённого от дисплея модулятора. С помощью линзы L_4 ($f_4 = 500$ мм) лазерный пучок фокусировался на матрице видеокамеры CCD LOMO TC 1000 (размер пикселя $3,34 \times 3,34$ мкм).

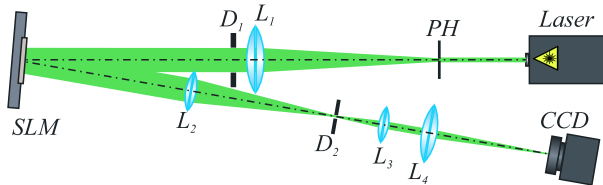


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:
 L – твердотельный лазер ($\lambda = 532$ нм), PH – пинхол (размер отверстия 40 мкм), L_1, L_2, L_3 и L_4 – линзы с фокусными расстояниями ($f_1 = 250$ мм, $f_2 = 350$ мм, $f_3 = 150$ мм, $f_4 = 500$ мм), D_1 и D_2 – диффрагмы, SLM – пространственный модулятор света PLUTO VIS, CCD – видеокамера LOMO TC-1000

На рис. 2 показаны фазовые функции спиральных пластинок с разной эллиптичностью β , а также экспериментальные и рассчитанные распределения интенсивности, сформированные ими в фокусе линзы L_4 . Топологический заряд спиральной фазовой пластинки равен $n = 1$. Небольшие отклонения распределения интенсивности, сформированного в случае, когда $\beta = 1$ от идеального кольца, связаны с тем, что свет падает на дисплей модулятора света под небольшим углом к нормали. Из рис. 2 видно, что экспериментальные распределения интенсивности (рис. 2ж-л) качественно согласуются с расчётными (рис. 2м-с). Распределения интенсивности $|E(\xi, \eta, z)|^2$ рассчитаны по формуле (23), при этом начальный радиус перетяжки Гауссова пучка w был взят с учётом его преобразования в изображающей оптической системе из линз L_2 и L_3 , то есть увеличенным в f_3/f_2 раз.

На рис. 3 показаны фазовые функции спиральных пластинок с разной эллиптичностью β и распределения интенсивности, сформированные ими в фокусе линзы L_4 . Топологический заряд спиральной фазовой пластинки равен $n = 2$.

Заметим, что формулы (15)–(17) инвариантны по отношению к замене параметра α на β . Поэтому, подставив β в (16) вместо α , для оптических вихрей, показанных на рис. 3ж–л, получим ОУМ, приведённый

в табл. 1. На рис. 3 видно, что расстояние между двумя нулями интенсивности уменьшается (в соответствии с формулой (29)) от рис. 3ж к рис. 3л, а ОУМ, наоборот, растёт для пучков на рис. 3ж до рис. 3л (см. табл. 1, строка 3).

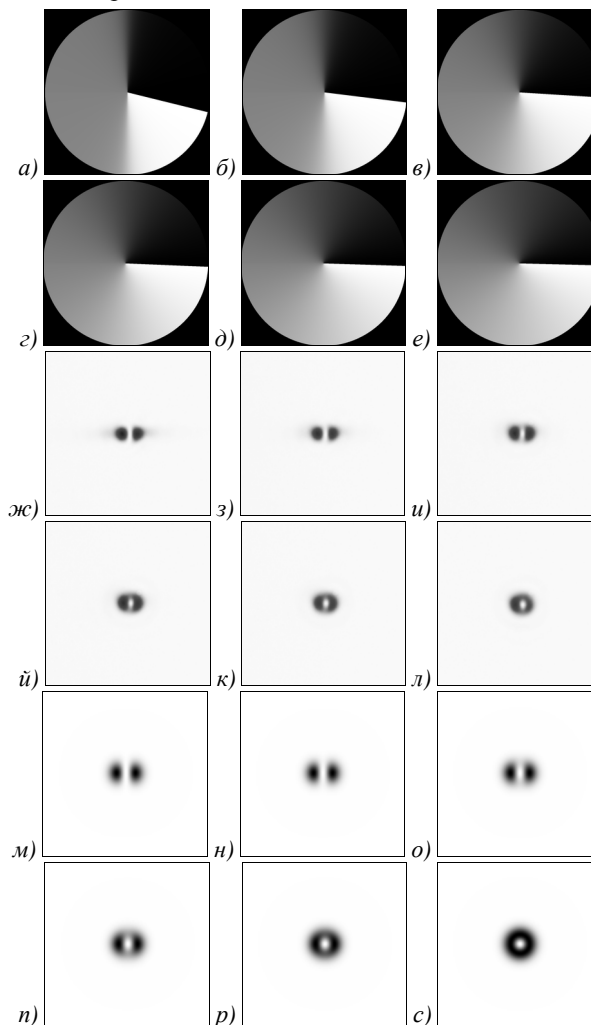


Рис. 2. Фазовые функции элементов (а-е), сформированные (ж-л, негатив) и рассчитанные (м-с, негатив) распределения интенсивности в фокусе линзы L_4 для случая использования СФП с топологическим зарядом $n = 1$ и отношением β : 0,1 (а, ж, м); 0,2 (б, з, н); 0,4 (в, и, о); 0,6 (г, й, п); 0,8 (д, к, р); 1 (е, л, с). Размер картинок интенсивностей – 900×900 мкм

Табл. 1. Нормированный ОУМ, рассчитанный по формуле (16) для эллиптического Гауссова вихря с $n = 2$ и разной степенью эллиптичности β

Рис. 3	ж	з	и	й	к	л
β	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1
J_z/W	0,26	0,53	1,11	1,56	1,91	2

Интересно отметить, что из табл. 1 видно, что в промежутке между значениями β от 0,2 до 0,4 будет такое значение β , при котором ОУМ эллиптического Гауссова вихря будет равен 1. Но при этом всё равно у такого оптического вихря в фокальной плоскости линзы будет два нуля интенсивности (а не один), как у всех аналогичных вихрей на рис. 3.

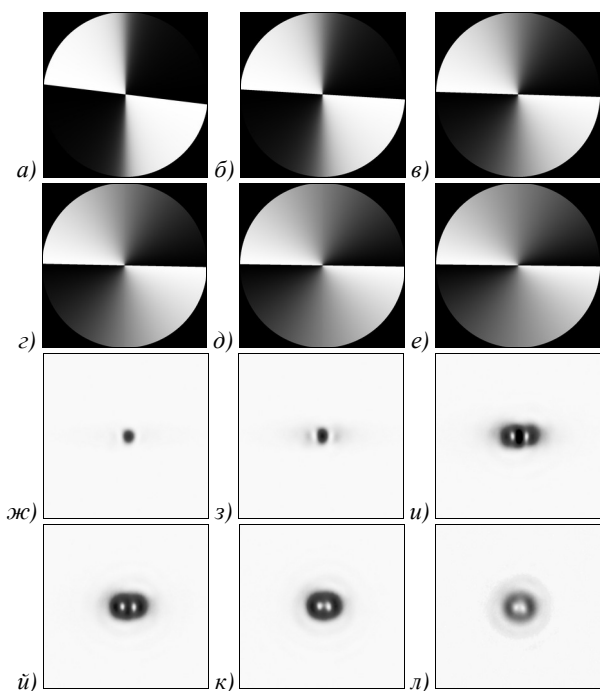


Рис. 3. Фазовые функции элементов (а-е) и сформированные распределения интенсивности (ж-л, негатив) в фокусе линзы L_4 для случая использования СФП с топологическим зарядом $n = 2$ и отношением β : 0,1 (а, ж); 0,2 (б,з); 0,4 (в,и); 0,6 (г,й); 0,8 (д,к); 1 (е, л). Размер картинок интенсивностей – 900×900 мкм

На рис. 4 показаны фазовые функции спиральных пластинок с разной эллиптичностью β и распределения интенсивности, сформированные ими в фокусе линзы L_4 . Топологический заряд спиральной фазовой пластинки $n = 3$.

В табл. 2 показаны значения нормированного ОУМ, рассчитанные по формуле (17) для эллиптического Гауссова вихря с $n = 3$ и разными значениями β . На рис. 4 видно, что расстояние между тремя нулями интенсивности уменьшается (в соответствии с формулой (29)) от рис. 4ж к рис. 4л, а ОУМ, наоборот, растёт для пучков на рис. 4ж до рис. 4л (см. табл. 2, строка 3). На рис. 4ж и рис. 4з ясно видно только один центральный ноль, так как два других периферийных нуля интенсивности попадают в область низкой интенсивности Гауссова пучка. Они явно видны, начиная с рис. 4и. На рис. 4л эти три нуля интенсивности объединяются в один ноль обычного оптического вихря с радиальной симметрией.

Табл. 2. Нормированный ОУМ, рассчитанный по формуле (17) для эллиптического Гауссова вихря с $n = 3$ и разной степенью эллиптичности β

Рис. 3	ж	з	и	й	к	л
β	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1
J_z/W	0,36	0,72	1,47	2,20	2,97	3

На рис. 5 показаны фазовые функции спиральных пластинок с разной эллиптичностью β и распределения интенсивности, сформированные ими в фокусе линзы L_4 . Топологический заряд спиральной фазовой пластинки $n = 4$.

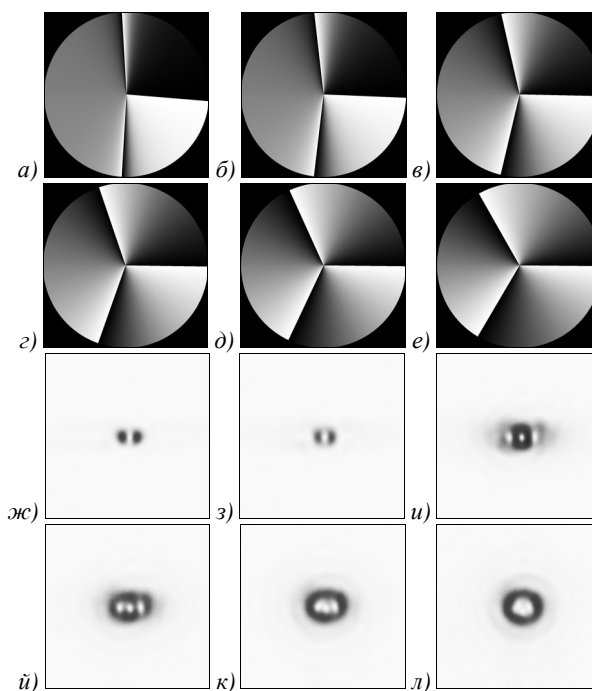


Рис. 4. Фазовые функции элементов (а-е) и сформированные распределения интенсивности (ж-л, негатив) в фокусе линзы L_4 для случая использования СФП с топологическим зарядом $n = 3$ и отношением β : 0,1 (а, ж); 0,2 (б,з); 0,4 (в,и); 0,6 (г,й); 0,8 (д,к); 1 (е, л). Размер картинок интенсивностей 900×900 мкм

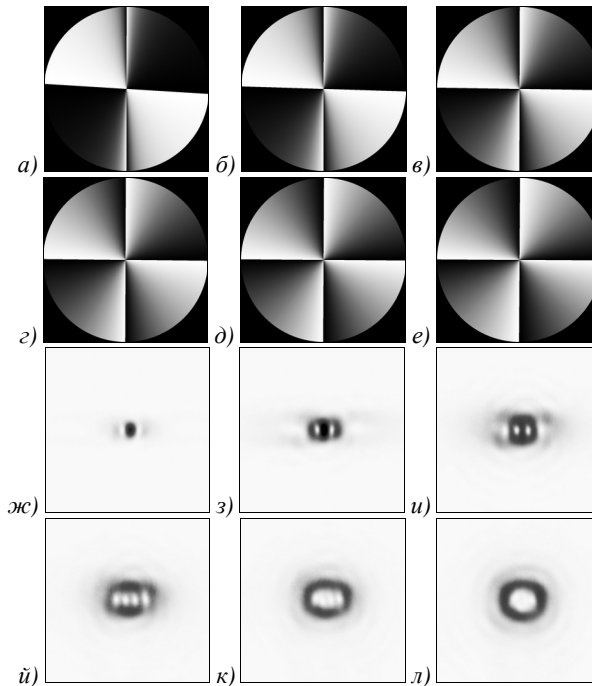


Рис. 5. Фазовые функции элементов (а-е) и сформированные распределения интенсивности (ж-л, негатив) в фокусе линзы L_4 для случая использования СФП с топологическим зарядом $n = 4$ и отношением β : 0,1 (а, ж); 0,2 (б,з); 0,4 (в,и); 0,6 (г,й); 0,8 (д,к); 1 (е, л). Размер картинок интенсивностей 900×900 мкм

Четыре нуля интенсивности в фокусе линзы ясно видны только на рис. 5и и рис. 5й. На рис. 5ж нулей ещё не видно, так как они попадают в область низкой интен-

сивности Гауссова пучка. На рис. 5з видны только два нуля интенсивности, другие два нуля попадают в область низкой интенсивности. На рис. 5к и рис. 5л нулей не видно по другой причине: расстояние между ними мало, и их трудно отличить один от другого.

На рис. 6 показаны распределения интенсивности эллиптического Гауссова вихря с топологическим зарядом $n=4$ и параметром эллиптичности $\beta=0,6$, зарегистрированные на разных расстояниях от начальной плоскости (до фокальной плоскости линзы L_4 и после неё).

Из рис. 6 видно, что в соответствии с формулой (25) большая ось эллипса интенсивности в сечении оптического вихря, оставаясь во втором и четвёртом квадрантах, поворачивается при распространении до фокуса из вертикального положения в горизонтальное положение в фокальной плоскости линзы (рис. 6жс). После фокуса, наоборот, большая ось эллипса интенсивности поворачивается, оставаясь в первом и третьем квадрантах, из горизонтального положения в вертикальное. Изменение знака наклона прямой в формуле (25) происходит из-за изменения знака переменной $z_1 = zf/(z-f)$ при прохождении фокуса, и поэтому из-за изменения знака угла $\psi = \arctg(z_0/z_1)/2$. В соответствии с формулой (26) расстояние между четырьмя нулями, лежащими на большой оси эллипса интенсивности, растёт и достигает максимума (27) в фокальной плоскости линзы (рис. 6жс). Поэтому четыре нуля интенсивности отчётливо видны именно в фокальной плоскости на рис. 6жс. После фокуса расстояние между нулями опять уменьшается, и их трудно различить.

Заключение

В работе получены следующие результаты. Получены явные замкнутые выражения для комплексной амплитуды и нормированного орбитального углового момента для обычного Гауссова пучка, в который внедрён эллиптический оптический вихрь с n -кратно вырожденным нулём интенсивности в центре Гауссова пучка. Показано, что эллиптический Гауссов вихрь обладает дробным ОУМ, максимальное значение которого, равное топологическому заряду обычного вихря n , достигается при отсутствии эллиптичности у вихря. Большая ось эллипса интенсивности в сечении пучка вращается при распространении и поворачивается на 90° от начальной плоскости до фокальной плоскости сферической линзы. На большой оси эллипса интенсивности находятся n нулей интенсивности ЭГВ, расстояние между которыми меняется как при распространении пучка, так и при изменении степени эллиптичности. Максимальное расстояние между нулями интенсивности будет в фокальной плоскости, при постоянной степени эллиптичности. При отсутствии эллиптичности все нули «собираются» в один осевой n -вырожденный ноль интенсивности. Такой пучок экспериментально сформирован с помощью освещения обычным Гауссовым пучком эллиптической спиральной фазовой пластинки. Хотя формально пропускание такой фазовой пластинки (30) отличается от комплексной ам-

плитуды эллиптического нуля (1), но, тем не менее, экспериментальные результаты качественно согласуются с теорией. Это объясняется тем, что распределения фазы у функций (1) и (30) одинаковы.

Заметим, что если, наоборот, рассмотреть эллиптический Гауссов пучок с внедрённым обычным радиально-симметричным вихрем с n -кратно вырожденным нулем в центре эллиптического Гауссова пучка, то у такого пучка ОУМ будет целый и равен топологическому заряду вихря n при любой степени эллиптичности Гауссова пучка.

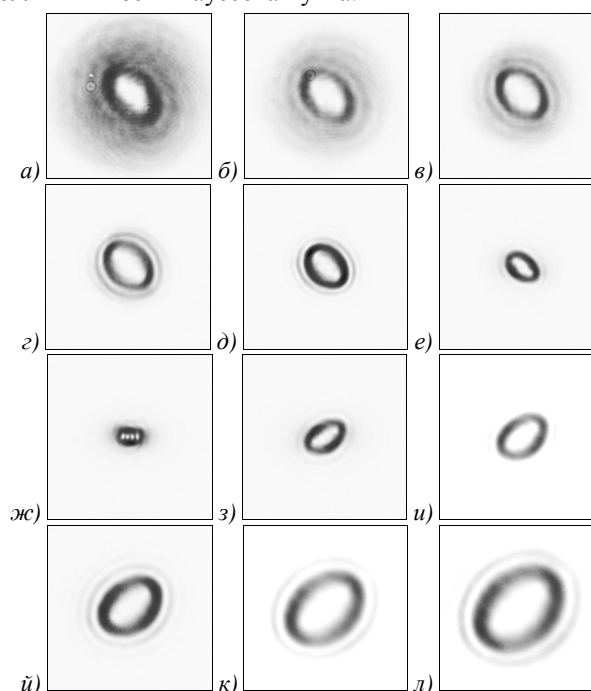


Рис. 6. Распределения интенсивности (негатив), полученные на различном расстоянии от плоскости линзы L_4 ($f_4 = 150$ мм) для случая эллиптической СФП с топологическим зарядом $n = 4$ и параметром $\beta = 0,6$: (а) 100 мм, (б) 125 мм, (в) 150 мм, (г) 175 мм, (д) 200 мм, (е) 225 мм, (ж) 250 мм (фокус), (з) 275 мм, (и) 300 мм, (й) 325 мм, (к) 350 мм, (л) 375 мм. Размер картинок интенсивностей – 1800×1800 мкм

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 17-19-01186).

Литература

1. **Mair, A.** Entanglement of the orbital angular momentum states of photons / A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, A. Zeilinger // Nature. – 2001. – Vol. 412. – P. 313-316. – DOI: 10.1038/35085529.
2. **Vaziri, A.** Superpositions of the orbital angular momentum for applications in quantum experiments / A. Vaziri, G. Weihs, A. Zeilinger // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. – 2002. – Vol. 4(2). – P. S47-S51. – DOI: 10.1088/1464-4266/4/2/367.
3. **Chen, Q.** Entanglement of the orbital angular momentum states of the photon pairs generated in a hot atomic ensemble / Q. Chen, B. Shi, Y. Zhang, G. Guo // Physical Review A. – 2008. – Vol. 78, Issue 5. – 053810. – DOI: 10.1103/PhysRevA.78.053810.

4. **Kotlyar, V.V.** Asymmetric Gaussian optical vortex / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Letters*. – 2017. – Vol. 42, Issue 1. – P. 139-142. – DOI: 10.1364/OL.42.000139.
5. **Котляр, В.В.** Дробный орбитальный угловой момент Гауссова пучка с внедрённым внеосевым оптическим вихрем / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев, Е.Г. Абрамочкин // *Компьютерная оптика*. – 2017. – Т. 41, № 1. – С. 22-29. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-1-22-29.
6. **Kotlyar, V.V.** Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Optics Letters*. – 2014. – Vol. 39(8). – P. 2395-2398. – DOI: 10.1364/OL.39.002395.
7. **Kovalev, A.A.** Asymmetric Laguerre-Gaussian beams / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, A.P. Porfirev // *Physical Review A*. – 2016. – Vol. 93, Issue 6. – 063858. – DOI: 10.1103/PhysRevA.93.063858.
8. **Kumar, A.** Crafting the core asymmetry to lift the degeneracy of optical vortices / A. Kumar, P. Vaity, R.P. Singh // *Optics Express*. – 2011. – Vol. 19(7). – P. 6182-6190. – DOI: 10.1364/OE.19.006182.
9. **Dennis, M.R.** Rows of optical vortices from elliptically perturbing a high-order beam / M.R. Dennis // *Optics Letters*. – 2006. – Vol. 31(9). – P. 1325-1327. – DOI: 10.1364/OL.31.001325.
10. **Kotlyar, V.V.** Elliptic Laguerre-Gaussian beams / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, A.A. Almazov, V.A. Soifer, K. Jefimovs, J. Turunen // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2006. – Vol. 23(1). – P. 43-56. – DOI: 10.1364/JOSA.23.000043.
11. **Kotlyar, V.V.** Vortex Hermite-Gaussian laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Letters*. – 2015. – Vol. 40(5). – P. 701-704. – DOI: 10.1364/OL.40.000701.
12. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 750 с.

Сведения об авторах

Котляр Виктор Викторович, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета. В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.

Ковалёв Алексей Андреевич, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. В списке научных работ более 150 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: alanko@smr.ru.

Порфирьев Алексей Петрович, 1987 года рождения, в 2010 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (СГАУ) по специальности «Прикладные математика и физика». Кандидат физико-математических наук (2013 год). Ассистент кафедры технической кибернетики Самарского университета, научный сотрудник лаборатории микро- и нанотехнологий ИСОИ РАН – филиала ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, оптическое манипулирование. E-mail: porfirev.alexey@smr.ru.

ГРНТИ: 29.31.15.

Поступила в редакцию 5 мая 2017 г. Окончательный вариант – 10 мая 2017 г.

ORBITAL ANGULAR MOMENTUM OF AN ELLIPTIC OPTICAL VORTEX EMBEDDED INTO THE GAUSSIAN BEAM

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}, A.P. Porfirev^{1,2}

¹ Samara National Research University, Samara, Russia,

² Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia

Abstract

We consider an elliptic optical vortex embedded into a Gaussian beam. For such a beam, explicit closed-form expressions are derived for the complex amplitude and the normalized orbital angular momentum (OAM). It is shown that the elliptic Gaussian vortex (EGV) has a fractional OAM. The maximal OAM value equal to the vortex topological charge n is achieved at zero ellipticity of the vortex. The major axis of the intensity ellipse in the beam cross section rotates in propagation, turning by a 90-degree angle from the initial plane to the focal plane of a spherical

lens. There are n intensity nulls on the major axis of the EGV intensity ellipse. The distance between the nulls varies during the beam propagation and with changing degree of ellipticity. At a fixed degree of ellipticity, the distance between the intensity nulls is maximal in the focal plane. At zero ellipticity, all nulls are "gathering" into a single on-axis n -times degenerate intensity null. The experimental results are consistent with the theory.

Keywords: orbital angular momentum, optical vortex, Gaussian beam, elliptic optical vortex.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Orbital angular momentum of an elliptic optical vortex embedded into the Gaussian beam. *Computer Optics* 2017; 41(3): 330-337. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-3-330-337.

Acknowledgements: The work was funded by the Russian Science Foundation under project #17-19-01186.

References

- [1] Mair A, Vaziri A, Weihs G, Zeilinger A. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature* 2001; 412: 313-316. DOI: 10.1038/35085529.
- [2] Vaziri A, Weihs G, Zeilinger A. Superpositions of the orbital angular momentum for applications in quantum experiments. *J Opt B: Quant Semicl Opt* 2002; 4(2): S47-S51. DOI: 10.1088/1464-4266/4/2/367.
- [3] Chen Q, Shi B, Zhang Y, Guo G. Entanglement of the orbital angular momentum states of the photon pairs generated in a hot atomic ensemble. *Phys Rev A* 2008; 78(5): 053810. DOI: 10.1103/PhysRevA.78.053810.
- [4] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Asymmetric Gaussian optical vortex. *Opt Lett* 2017; 42(1): 139-142. DOI: 10.1364/OL.42.000139.
- [5] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP, Abramochkin EG. Fractional orbital angular momentum of a Gaussian beam with an embedded off-axis optical vortex. *Computer Optics* 2017; 41(1): 22-29. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-1-22-29.
- [6] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Asymmetric Bessel modes. *Opt Lett* 2014; 39(8): 2395-2398. DOI: 10.1364/OL.39.002395.
- [7] Kovalev AA, Kotlyar VV, Porirev AP. Asymmetric Laguerre-Gaussian beams. *Phys Rev A* 2016; 93(6): 063858. DOI: 10.1103/PhysRevA.93.063858.
- [8] Kumar A, Vaity P, Singh RP. Crafting the core asymmetry to lift the degeneracy of optical vortices. *Opt Express* 2011; 19(7): 6182-6190. DOI: 10.1364/OE.19.006182.
- [9] Dennis MR. Rows of optical vortices from elliptically perturbing a high-order beam. *Opt Lett* 2006; 31(9): 1325-1327. DOI: 10.1364/OL.31.001325.
- [10] Kotlyar VV, Khonina SN, Almazov AA, Soifer VA, Jefimovs K, Turunen J. Elliptic Laguerre-Gaussian beams. *J Opt Soc Am A* 2006; 23(1): 43-56. DOI: 10.1364/JOSA-A.23.000043.
- [11] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Vortex Hermite-Gaussian laser beams. *Opt Lett* 2015; 40(5): 701-704. DOI: 10.1364/OL.40.000701.
- [12] Prudnikov AP, Brychkov YA, Marichev OI. *Integrals and Series, Special Functions*. New York: Gordon and Breach; 1986.

Authors' information

Victor Victorovich Kotlyar is the head of a laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and a professor of Computer Science department at Samara National Research University. He graduated from Kuibyshev State University (1979), received his Candidate's and Doctor's Degrees in Physics & Mathematics from Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation of the RAS (1992). He is a co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current research interests include diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices.

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 150 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices.

Alexey Petrovich Porfirev (b. 1987) graduated (2010) from Samara National Research University, majoring in Applied Physics and Mathematics. He holds the Candidate's Degree in Physics and Mathematics (2013). Currently he is an assistant professor at Technical Cybernetics department of Samara National Research University and a researcher at Micro- and Nanotechnologies laboratory of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. His current research interests include diffractive optics and optical manipulation.

Received May 5, 2017. The final version – May 10, 2017.