

ОРБИТАЛЬНЫЙ УГЛОВОЙ МОМЕНТ АСТИГМАТИЧЕСКОГО ПУЧКА ЭРМИТА–ГАУССА

В.В. Котляр^{1,2}, А.А. Ковалёв^{1,2}, А.П. Порфирьев^{1,2}¹ Институт систем обработки изображений РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Самара, Россия,² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, Самара, Россия

Аннотация

Получена явная формула для нормированного орбитального углового момента для эллиптического пучка Эрмита–Гаусса (ЭГ) с номером $(0, n)$, сфокусированного цилиндрической линзой. Этот орбитальный угловой момент может быть по модулю как больше n , так и меньше n . Если цилиндрическая линза фокусирует не эллиптический, а обычный пучок Эрмита–Гаусса, то он также будет обладать орбитальным угловым моментом как большим, так и меньшим по модулю, чем эллиптический пучок Эрмита–Гаусса. При $n=0$ этот пучок становится астигматическим Гауссовым пучком, но будет по-прежнему обладать орбитальным угловым моментом. С помощью двух интерферограмм восстановлена фаза астигматического Гауссова пучка, с помощью которой рассчитан нормированный орбитальный угловой момент. Значения орбитального углового момента, рассчитанные по теоретической формуле и с помощью гибридного модельно-экспериментального метода, отличаются всего на 6 %.

Ключевые слова: орбитальный угловой момент, эллиптический пучок Эрмита–Гаусса, восстановление фазы.

Цитирование: Котляр, В.В. Орбитальный угловой момент астигматического пучка Эрмита–Гаусса / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 1. – С. 13-21. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-1-13-21.

Введение

Лазерные пучки с орбитальным угловым моментом (ОУМ) активно исследуются в настоящее время из-за широкого их применения для оптического захвата и вращения микрочастиц [1] и холодных атомов [2], в фазово-контрастной микроскопии [3], в микроскопии со стимулированным источником излучения [4], в оптической классической [5] и квантовой [6] информатике. Чаще всего пучками с ОУМ являются вихревые лазерные пучки с сингулярной фазой и вихревым (спиральным) волновым фронтом. Комплексная амплитуда таких пучков имеет общий вид $A(r)\exp(in\varphi)$, где $A(r)$ – амплитуда пучка, (r, φ) – полярные координаты, n – топологический заряд оптического вихря. Плотность ОУМ и полный ОУМ на один фотон таких пучков равны топологическому заряду n . Возникают два вопроса. Все ли лазерные пучки с ОУМ имеют дислокацию фазы и вихревой волновой фронт, или есть другие типы пучков с ОУМ? И какой максимальный ОУМ можно получить на практике?

Ответ на первый вопрос положительный, и его можно найти в работе [7]. В [7] вычислили ОУМ для эллиптического Гауссова пучка, сфокусированного цилиндрической линзой. В этой работе с помощью теоретической оценки показано, что у такого пучка ОУМ может быть равен 10000 на фотон. Правда, практически в [7] реализован только пучок с ОУМ, равным 25 на фотон. Заметим, что идея использования цилиндрической линзы для придания пучку ОУМ была впервые высказана в [8]. В [8] было экспериментально показано, что пучок Эрмита–Гаусса, не обладающий ОУМ, после цилиндрической линзы на определённом расстоянии и при определённых условиях преобразуется в пучок Лагерра–Гаусса с ОУМ.

В работах [9–20] пытались ответить на второй вопрос и получить как можно большее значение ОУМ. В [9] предложено увеличивать ОУМ с помо-

щью набора Гауссовых вихревых пучков, центры которых расположены на окружности, а оптические оси отдельных пучков и общая оптическая ось являются скрещенными прямыми. В [9] показано, что ОУМ такого составного пучка может быть равен 204 на фотон. В [10] вместо Гауссовых пучков предлагается использовать небольшие отверстия в непрозрачном экране как точечные источники. Если их расположить в виде спирали, то в совокупности они сформируют вихревой пучок с ОУМ. В [10] практически реализован пучок с ОУМ, равным 3. В [11] показано, что при острой фокусировке оптического вихря с большим топологическим зарядом уменьшается контраст или видность боковых лепестков. В [11] практически сфокусировался пучок с ОУМ, равным 15 на фотон. В [12] предложен интересный способ определения топологического заряда оптического вихря с помощью кольцевой дифракционной решётки. Экспериментально показано, что таким способом можно определить топологический заряд ± 25 . В [13] экспериментально с помощью трёхволнового смешения в нелинейной среде Керра сформированы вихревые гармоники с ОУМ до 30 на фотон. В [14] с помощью цифрового многоэлементного зеркала (с числом микрзеркал 1024×768) практически осуществили генерацию идеального оптического вихря с топологическим зарядом 90. В [15] с помощью жидкокристаллического модулятора света (число элементов 1900×1200) сформировали оптический вихрь с топологическим зарядом 200, что позволило вращать микрочастицы диаметром 1,4 мкм со скоростью 500 мкм/с. В [16] также с помощью модулятора света (число отсчётов 1920×1080) сформированы перепутанные пары фотонов с ОУМ ± 300 на фотон. В [17] с помощью спирального фазового зеркала, полученного в пластинке алюминия алмазным резцом, экспериментально сформирован оптический вихрь с топологическим зарядом 100. Эти же авторы [18] с помощью усовершенствованной технологии на подложке из алюминия

диаметром 75 мм и шероховатостью 3 нм создали спиральное зеркало, способное формировать оптические вихри с топологическим зарядом 1020. В [18] также интерферометрически доказали, что сформированный зеркалом оптический вихрь имеет топологический заряд 5050. В [19] с помощью электронной литографии в резисте РММА создали голограмму диаметром 80 мкм с разрешением 35 нм и высотой рельефа 25 нм, которая позволила сформировать вихревой пучок электронов с энергией 0,5–1 эВ с топологическим зарядом 1000. И, наконец, в [20] с помощью спирального алюминиевого зеркала диаметром около 50 мм для длины волны 810 нм сформированы фотоны, перепутанные по ОУМ и поляризации. Причём квантовый ОУМ фотонов был равен ± 10010 . Это максимальное значение ОУМ, полученное на сегодняшний день.

В предыдущих работах авторов [21], [22] были получены точные формулы для ОУМ астигматического Гауссова пучка, отличные от формул, полученных в [7]. В данной работе мы обобщаем результаты работ [21], [22] и рассматриваем астигматический пучок Эрмита–Гаусса. Будет показано, что эллиптический пучок Эрмита–Гаусса с номером $(0, n)$ после цилиндрической линзы приобретает ОУМ, который в n раз больше, чем у эллиптического Гауссова пучка после цилиндрической линзы. Теоретическая оценка даёт значение для ОУМ такого пучка более 100000 на фотон. Приведены также экспериментальные результаты для астигматического Гауссова пучка: полученный ОУМ отличался от теоретического на 6 %.

1. Безвихревой пучок с ОУМ

В этом параграфе для удобства читателя первые четыре формулы совпадают с [7]. Обычно рассматриваются параксиальные вихревые лазерные пучки, обладающие ОУМ. У таких пучков есть точки сингулярности – это изолированные нули интенсивности, в которых фаза не определена и вокруг которых изофазная поверхность волнового фронта имеет спиральную форму. Но, оказывается, есть простые световые поля, которые обладают ОУМ и не имеют изолированных нулей интенсивности с вихревой фазой. Рассмотрим Гауссов эллиптический пучок, в перетяжке которого расположена цилиндрическая линза [7], образующая которой повернута в плоскости перетяжки на угол α . Комплексная амплитуда света сразу за цилиндрической линзой имеет вид:

$$E(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2}\right) \times \exp\left(-\frac{ikx^2 \cos^2 \alpha}{2f} - \frac{iky^2 \sin^2 \alpha}{2f} - \frac{ikxy \sin 2\alpha}{2f}\right), \quad (1)$$

где w_x и w_y – радиусы перетяжки Гауссова пучка по декартовым осям, f – фокусное расстояние тонкой цилиндрической линзы, образующая которой имеет угол с вертикальной осью y , равный α (линза повернута против часовой стрелки), k – волновое число света. Нормированный ОУМ в параксиальном случае вычисляется по формулам [7] (с точностью до постоянных):

$$J_z = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) \left(x \frac{\partial E(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial E(x, y)}{\partial x} \right) dx dy, \quad (2)$$

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(x, y) E(x, y) dx dy, \quad (3)$$

где J_z – проекция на оптическую ось ОУМ, W – плотность энергии (мощности) света, Im – мнимая часть числа, \bar{E} – комплексно сопряжённая амплитуда к амплитуде (1). Подставляя (1) в (2) и (3), получим простое выражение для нормированного ОУМ светового поля (1):

$$\frac{J_z}{W} = \left(\frac{k \sin 2\alpha}{8f} \right) (w_y^2 - w_x^2). \quad (4)$$

Из (4) видно, что ОУМ равен нулю, если Гауссов пучок имеет круглое сечение ($w_x = w_y$) или линза не имеет наклона к вертикальной оси ($\alpha = 0$). При наклоне в 45 градусов ОУМ (4) максимальный при прочих равных условиях. Из (4) также видно, что ОУМ пучка (1) в общем случае дробный, хотя может быть и целым. Чем меньше фокусное расстояние цилиндрической линзы, тем больше ОУМ пучка, и чем больше степень эллиптичности пучка (1), тем больше его ОУМ. Знак ОУМ определяется тем, по какой оси (y или x) больше вытянут Гауссов пучок в перетяжке. Преимущество пучка (1) в том, что он может быть реализован без дополнительных элементов, без модулятора света, спиральной фазовой пластинки или голограммы с «вилочкой». Для его формирования надо всего три цилиндрические линзы, две из которых формируют эллиптическую перетяжку Гауссова пучка, а третья – создает ОУМ.

Оценим величину ОУМ для конкретных значений величин, входящих в (4). Гауссов пучок считается параксиальным, если радиусы его перетяжки намного больше длины волны, пусть они будут равны $w_x = 2$ мм и $w_y = 1$ мм, фокусное расстояние пусть будет равно $f = 10$ мм, а длина волны $\lambda = 0,5$ мкм, наклон линзы равен 45 градусов ($\alpha = \pi/4$). Тогда ОУМ в (4) будет равен 471,24.

Интересно рассмотреть нормированную плотность ОУМ пучка (1). В этом случае вместо (2) и (3) надо использовать формулы:

$$j_z = \text{Im} \left[\bar{E}(x, y) \left(x \frac{\partial E(x, y)}{\partial y} - y \frac{\partial E(x, y)}{\partial x} \right) \right], \quad (5)$$

$$I = \bar{E}(x, y) E(x, y). \quad (6)$$

Подставляя (1) в (5) и (6), получим нормированную плотность ОУМ пучка (1):

$$\frac{j_z}{I} = \frac{k}{2f} \left[(y^2 - x^2) \sin 2\alpha + 2xy \cos 2\alpha \right]. \quad (7)$$

Из (7) видно, что плотность ОУМ не зависит от радиуса перетяжки Гауссова пучка, то есть ОУМ будет одинаковым и для круглого, и для эллиптического Гауссова пучка. При $\alpha = 0, \pi/2$ ОУМ (7) равен нулю на декартовых осях и максимальный по модулю на двух ли-

ниях под углами ± 45 градусов к оси x . И, наоборот, при $\alpha = \pm \pi/4$ ОУМ (7) равен нулю на двух линиях под углами ± 45 градусов к оси x и максимальный по модулю вдоль декартовых осей x и y . На окружности любого радиуса R с центром в начале координат ОУМ зависит только от полярного угла φ и равен:

$$\frac{j_z}{I} = \frac{k}{2f} R^2 \sin[2(\varphi - \alpha)]. \quad (8)$$

Из (8) видно, что при обходе вокруг центра при любом R ОУМ меняет знак дважды: при $0 < \varphi - \alpha < \pi/2$ ОУМ положительный, при $\pi/2 < \varphi - \alpha < \pi$ – отрицательный, при $\pi < \varphi - \alpha < 3\pi/2$ – положительный и при $3\pi/2 < \varphi - \alpha < 2\pi$ – отрицательный. Это говорит о том, что полный ОУМ для круглого Гауссова пучка ($w_x = w_y$) будет равен нулю, так как совокупность положительных и отрицательных значений плотности ОУМ (8) компенсируют друг друга. Если же Гауссов пучок эллиптический, то полный ОУМ (4) будет отличным от нуля. У обычных вихревых пучков с амплитудой $A(r)\exp(in\varphi)$ нормированная плотность ОУМ постоянная $j_z/I = n$, $I = A^2(r)$, в отличие от пучка (1), у которого нормированная плотность ОУМ (7) знакопеременная и зависит от координат. То есть в каждой точке в поперечном сечении вихревого пучка $A(r)\exp(in\varphi)$ захваченная микрочастица будет получать локальный момент для вращения в одном и том же направлении. А микрочастица, захваченная в пучок (1), в некоторых точках в поперечном сечении пучка будет получать момент для вращения (относительно центра масс, который совпадает с центром пучка и началом координат) по часовой стрелке, а в других точках – против часовой стрелки. Микрочастица будет вращаться как одно целое, если сумма этих локальных моментов не будет равна нулю.

Далее, в отличие от [7], мы покажем, что эллиптический Гауссов пучок после цилиндрической линзы вращается. Получим формулы, описывающие распространение пучка (1), и покажем, что при его распространении не возникает изолированных нулей интенсивности, то есть пучок (1) не является вихревым или сингулярным [9–20]. Преобразование Френеля от комплексной амплитуды (1) имеет вид:

$$E(\xi, \eta, z) = \frac{-ik}{z\sqrt{p(z)q(z)}} \exp[A(z)\xi^2 + B(z)\eta^2 + C(z)\xi\eta], \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{ik}{2z} - \frac{k^2}{4z^2 p(z)} + \frac{k^4 \sin^2 2\alpha}{64f^2 z^2 p^2(z)q(z)}, \\ B(z) &= \frac{ik}{2z} - \frac{k^2}{4z^2 q(z)}, \quad C(z) = \frac{ik^3 \sin 2\alpha}{8fz^2 p(z)q(z)}, \\ p(z) &= \frac{1}{w_x^2} + \frac{ik}{2z_x}, \quad q(z) = \frac{1}{w_y^2} + \frac{ik}{2z_y} + \frac{k^2 \sin^2 2\alpha}{16f^2 p(z)}, \\ z_x &= \frac{zf}{z \cos^2 \alpha - f}, \quad z_y = \frac{zf}{z \sin^2 \alpha - f}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (9) видно, что Гауссов пучок (1) при распространении остается Гауссовым пучком, но меняется масштабно и вращается. Формула (9) существенно упрощается при $\alpha = \pi/4$ и $z = 2f$, так как при этих параметрах $z_x \rightarrow \infty$, $z_y \rightarrow \infty$:

$$E(\xi, \eta, z = 2f) = -2i\gamma^{-1} \times \exp\left[\frac{ik}{4f}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{\xi^2}{w_y^2 \gamma^2} - \frac{\eta^2}{w_x^2 \gamma^2} + \frac{ik\xi\eta}{2f\gamma^2}\right], \quad (11)$$

где

$$\gamma = \left(1 + \frac{16f^2}{k^2 w_x^2 w_y^2}\right)^{1/2}. \quad (12)$$

Из (11) видно, что эллиптический Гауссов пучок (1) на расстоянии $z = 2f$ повернулся на 90 градусов и уширился, так как $\gamma > 1$.

2. Формирование эллиптического Гауссова пучка

В [7] эллиптический Гауссов пучок формировался с помощью двух цилиндрических линз. Но можно обойтись всего одной цилиндрической линзой, чтобы создать расходящийся или сходящийся эллиптический Гауссов пучок. Рассмотрим подробнее эту ситуацию. Пусть в перетяжке обычного Гауссова пучка с круглым сечением и радиусом перетяжки w размещена цилиндрическая линза с кривизной вдоль оси x и фокусным расстоянием f_1 . Тогда комплексная амплитуда эллиптического Гауссова пучка на расстоянии z за цилиндрической линзой будет равна:

$$E(x, y, z) = (q_0(z)q_1(z))^{-1/2} \exp\left[-\frac{x^2}{w^2 q_2(z)} - \frac{y^2}{w^2 q_0(z)}\right], \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} q_0(z) &= 1 + iz/z_0, \\ q_1(z) &= q_0(z) - z/f_1, \\ q_2(z) &= q_1(z)(1 + iz_0/f_1)^{-1}, \\ z_0 &= kw^2/2. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (13), (14) видно, что при $f_1 \rightarrow \infty$ получается амплитуда обычного Гауссова пучка:

$$E(x, y, z) = (q_0(z))^{-1} \exp(-(x^2 + y^2)/w^2 q_0(z)). \quad (15)$$

Если в поле (13) поместить цилиндрическую линзу с фокусным расстоянием f , образуя которой повернута в плоскости перетяжки на угол α , комплексная амплитуда света сразу за цилиндрической линзой будет иметь вид:

$$E(x, y, z) = (q_0(z)q_1(z))^{-1/2} \exp\left[-\frac{x^2}{w^2 q_2(z)} - \frac{y^2}{w^2 q_0(z)}\right] \times \exp\left[-\frac{ikx^2 \cos^2 \alpha}{2f} - \frac{iky^2 \sin^2 \alpha}{2f} - \frac{ikxy \sin 2\alpha}{2f}\right]. \quad (16)$$

Нормированный ОУМ пучка (16) имеет вид:

$$\frac{J_z}{W} = \left(\frac{kw^2 \sin 2\alpha}{8f} \right) \left(\frac{|q_0|^2}{\operatorname{Re}(q_0)} - \frac{|q_2|^2}{\operatorname{Re}(q_2)} \right) = \left(\frac{kw^2 \sin 2\alpha}{8f} \right) \left(\frac{z}{f_1} \right) \left(2 - \frac{z}{f_1} \right). \quad (17)$$

Из (17) видно, что при $f_1 \rightarrow \infty$ ОУМ стремится к нулю, так как пучок (13) стремится к обычному Гауссову пучку (15). Из (17) также следует, что, увеличивая расстояние z между первой цилиндрической линзой с фокусным расстоянием f_1 и второй цилиндрической линзой с фокусным расстоянием f , можно неограниченно увеличивать ОУМ лазерного пучка. При $z=0$ и $z=2f_1$ ОУМ (17) тоже равен нулю, так как Гауссов пучок имеет круглое сечение. Положительный максимальный ОУМ (17) будет при $z=f_1$, то есть если разместить вторую цилиндрическую линзу в фокусе первой. Тогда вместо (17) получим ($z=f_1$):

$$J_z/W = (kw^2 \sin 2\alpha)/(8f). \quad (18)$$

Выражение (18) совпадает с выражением (4) для ОУМ, если принять, что $w_y=w$, $w_x=0$. При $z>2f_1$ ОУМ (17) меняет знак (становится отрицательным) [23] и далее увеличивается по модулю с ростом z .

3. Эллиптический пучок Эрмита-Гаусса (0, n) после цилиндрической линзы

Увеличить ОУМ лазерного пучка можно с помощью формирования эллиптического пучка Эрмита-Гаусса. В отличие от [8] рассмотрим далее эллиптический пучок Эрмита-Гаусса, сфокусированный цилиндрической линзой. Этот пучок является примером светового поля, ОУМ которого может быть в n раз больше, чем (4). Амплитуда в начальной плоскости такого поля описывается 1D эллиптическим пучком Эрмита-Гаусса с цилиндрической линзой, наклонённой в начальной плоскости под углом α градусов к декартовым осям:

$$E_n(x, y) = H_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{w_x} \right) \exp \left(-\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2} \right) \times \exp \left(-\frac{ikx^2 \cos^2 \alpha}{2f} - \frac{iky^2 \sin^2 \alpha}{2f} - \frac{ikxy \sin 2\alpha}{2f} \right). \quad (19)$$

Амплитуда поля (19) отличается от (1) только многочленом Эрмита $H_n(x)$, и они совпадают при $n=0$. Подставляя (19) в (2), (3), получим нормированный ОУМ для поля (19):

$$\frac{J_z}{W} = \left(\frac{k \sin 2\alpha}{8f} \right) (w_y^2 - w_x^2 (2n+1)). \quad (20)$$

Из (20) видно, что при $n=0$ ОУМ (20) совпадает с (4). Но есть и отличия: если радиусы Гауссова пучка равны $w_x=w_y=w$, то ОУМ в (4) равен нулю, а ОУМ пучка (19) не равен нулю, а вместо (20) можно записать:

$$J_z/W = -((kw^2 \sin 2\alpha)/(4f))n. \quad (21)$$

Из (21) следует, что ОУМ поля (19) при $w_x=w_y=w$ примерно в $2n$ больше по модулю, чем у поля (1) (смот-

ри (17) при $z=f_1$). Из (21) также следует, что при равенстве выражения в скобках единице ОУМ равен по модулю целому числу: $J_z/W = -n$. В [8] было показано, что при определённых условиях пучок Эрмита-Гаусса, не обладающий ОУМ, можно с помощью цилиндрической линзы преобразовать в пучок Лагерра-Гаусса, имеющий ОУМ, равный $J_z/W = \pm n$. Ниже мы покажем (другим способом, чем в [8]), что пучок (19) Эрмита-Гаусса с номером (0, n) при условии, что $w_x=w_y=w$, $\sin 2\alpha=1$ и $kw^2/(4f)=z_0/(2f)=1$, где z_0 – длина Рэлея, на расстоянии $z=2f$ формирует пучок Лагерра-Гаусса с номером (0, n). Действительно, преобразование Френеля для комплексной амплитуды пучка (19) при перечисленных выше условиях можно записать в виде:

$$E_n(\xi, \eta, z=2f) = \left(\frac{-ik}{4\pi f} \right) \exp \left(ik \frac{\xi^2 + \eta^2}{4f} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{w} \right) \times \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2} - \frac{ik}{2f} (xy + x\xi + y\eta) \right] dx dy. \quad (22)$$

Заметим, что условие $z_0/(2f)=1$ в (22) пока не использовалось, это будет сделано позже.

Интеграл по переменной x в выражении (22) можно вычислить с помощью справочного интеграла [24]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(cx) \exp \left(ibx - \frac{c^2 x^2}{2} \right) dx = \frac{i^n \sqrt{2\pi}}{c} \exp \left(-\frac{b^2}{2c^2} \right) H_n \left(\frac{b}{c} \right). \quad (23)$$

а интеграл по y , после вычисления интеграла по x , можно вычислить с помощью другого справочного интеграла [24, 25]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(cy) \exp \left(-p(y-t)^2 \right) dy = \frac{\sqrt{\pi} (p-c^2)^{n/2}}{p^{(n+1)/2}} H_n \left(ct \sqrt{\frac{p}{p-c^2}} \right). \quad (24)$$

Тогда на двойном фокусном расстоянии за цилиндрической линзой получим вместо (22) комплексную амплитуду вида:

$$E_n(\xi, \eta, z=2f) = (-i)^{n+1} \left(\frac{z_0}{2f} \right) \left(\frac{\bar{\gamma}^n}{\gamma^{n+1}} \right) \exp \left(ik \frac{\xi^2 + \eta^2}{4f} \right) \times \exp \left(-\frac{\xi^2 + \eta^2}{\bar{w}^2} + \frac{ik\xi\eta}{2f} \right) \times H_n \left[\frac{z_0(\bar{\gamma})^{-1}}{\sqrt{2}f\bar{w}} \left(\xi - i\eta \frac{z_0}{2f} \right) \right], \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{w} &= w \left(1 + 4f^2/z_0^2 \right)^{1/2}, \\ \bar{f} &= f \left(1 + 4f^2/z_0^2 \right), \\ \gamma &= \left(1 + z_0^2/4f^2 \right)^{1/2}, \\ \bar{\gamma} &= \left(1 - z_0^2/4f^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Из (25) видно, что поле (19) на расстоянии $z=2f$ по-прежнему остаётся пучком Эрмита-Гаусса, но с комплексным аргументом у многочлена Эрмита. Заметим, что аргумент многочлена Эрмита в (25) становится действительным только на горизонтальной оси при $\eta=0$. На этой оси у многочлена Эрмита есть n изолированных невырожденных нулей интенсивности. Причём, как следует из (21), ОУМ такого пучка с n изолированными нулями будет либо больше n , если $z_0/(2f) > 1$, либо меньше n , если $z_0/(2f) < 1$. При условии $z_0/(2f) = 1$, так как $x^{-n}H_n(ax) \rightarrow (2a)^n$ при $x \rightarrow \infty$, вместо многочлена Эрмита в (25) остаётся только одно слагаемое с максимальным показателем степени (один изолированный n -кратно вырожденный ноль интенсивности). Тогда вместо (25) получим:

$$E_n(\xi, \eta, z = z_0 = 2f) = (-i)^{n+1} 2^{-(n+1)} \exp\left(ik \frac{\xi^2 + \eta^2}{4f}\right) \times \exp\left(-\frac{\xi^2 + \eta^2}{2w^2} + \frac{ik\xi\eta}{4f}\right) \left(\frac{\xi - i\eta}{w}\right)^n. \quad (27)$$

Из (27) видно, что комплексная амплитуда поля пропорциональна сомножителю $(\xi - i\eta)^n = r^n \exp(-in\varphi)$, где (r, φ) – полярные координаты, характерному для оптических вихрей и пучков Лагерра-Гаусса с номерами $(0, n)$. Пучок (27) имеет ОУМ, равный $J_z/W = -n$.

Оценим ОУМ (21) на один фотон для пучка (19) при следующих практически реализуемых параметрах: длина волны $\lambda = 532$ нм, угол поворота цилиндрической линзы $\alpha = \pi/4$, радиус перетяжки Гауссова пучка $w = 2$ мм, фокусное расстояние $f = 10$ мм и порядок многочлена Эрмита $n = 100$. Нормированный ОУМ будет равен: 118104 на фотон.

4. Эксперимент

На рис. 1 показана экспериментальная схема для генерации и анализа эллиптических Гауссовых пучков. Выходное излучение твердотельного лазера коллимировалось с помощью системы, состоящей из пинхолла PH и сферической линзы L ($f = 150$ мм). Радиус перетяжки коллимированного Гауссова пучка $w = 3,5$ мм. Далее расширенный лазерный пучок делился на два с помощью светоделительного кубика BS_1 для реализации схемы интерферометра Маха-Цендера. В одном из плеч интерферометра с помощью цилиндрической линзы CL_1 ($f_1 = 500$ мм) формировался эллиптический Гауссов пучок в плоскости второй цилиндрической линзы CL_2 ($f_2 = 100$ мм). Расстояние между линзами CL_1 и CL_2 равнялось 200 мм.

Анализируемый лазерный пучок, сфокусированный линзой CL_2 , и опорный лазерный пучок с плоским волновым фронтом сводились с помощью второго светоделительного кубика BS_2 . Нейтральный светофильтр F был использован для выравнивания интенсивностей пучков при съёмке интерферограмм. Картины интерференции регистрировались с помощью видеокамеры CCD TopCam U3CMOS08500KPA (размер пикселя 1,67 мкм, разрешение 3328×2548 пикселей).

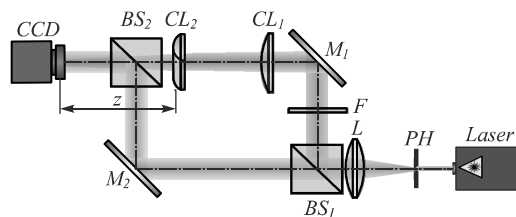


Рис. 1. Экспериментальная схема для генерации и анализа эллиптических Гауссовых пучков: Laser – твердотельный лазер ($\lambda = 532$ нм), PH – пинхолл (размер отверстия 40 мкм), L – сферическая линза ($f = 150$ мм), BS_1 и BS_2 – светоделительные кубики, F – нейтральный светофильтр, M_1 и M_2 – зеркала, CL_1 и CL_2 – цилиндрические линзы ($f_1 = 500$ мм, $f_2 = 100$ мм), CCD – видеокамера

На рис. 2а показано распределение интенсивности сходящегося эллиптического Гауссова пучка в плоскости цилиндрической линзы с фокусным расстоянием $f = 100$ мм, повернутой на угол 45 градусов в плоскости пучка. На рис. 2б показано сечение интенсивности того же пучка на расстоянии $z = 2f$ от цилиндрической линзы. Видно, что пучок повернулся почти на 90 градусов. На рис. 2в показана интерферограмма эллиптического Гауссова пучка на расстоянии $z = 2f$ (рис. 2б) с почти плоской волной. На рис. 2г показана интенсивность пучка на расстоянии $z = 3f$. Видно, что он повернулся на 135 градусов по отношению к исходному сечению (рис. 2а). На рис. 2д показана интерферограмма этого сечения (рис. 2г) с плоской волной.

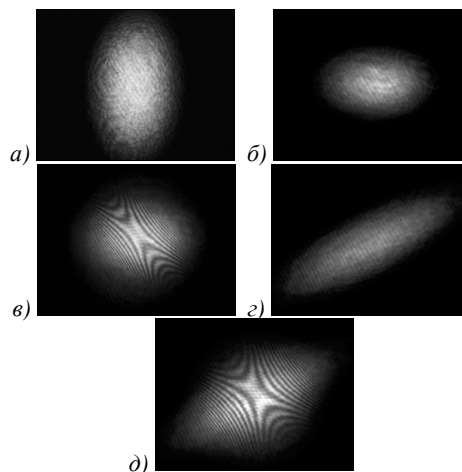


Рис. 2. Распределения интенсивности эллиптического Гауссова пучка, зарегистрированные на расстоянии от цилиндрической линзы z , равном 0 (а), $2f$ (б), $3f$ (г) и интерферограммы этого пучка с плоской волной на расстояниях $2f$ (в) и $3f$ (д). Размер всех кадров 5608×4255 мкм

На рис. 3 показаны две интерферограммы (рис. 3а, б), такие же, как на рис. 2в, но отличающиеся тем, что у опорного пучка была сделана задержка по фазе на π . По этим двум интерферограммам можно однозначно восстановить фазу астигматического Гауссова пучка на расстоянии $2f$ от цилиндрической линзы (рис. 2б). Восстановленная фаза астигматического Гауссова пучка (рис. 2б) показана на рис. 3в. По данной фазе далее вычислялся ОУМ, он оказался равен $J_z/W \approx 63$. Это значение почти в 2 раза меньше теоретического значения.

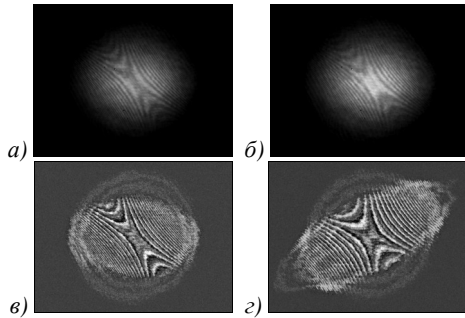


Рис. 3. Две интерферограммы (а, б), зарегистрированные в оптической схеме на рис. 1 на расстоянии $2f$ от второй цилиндрической линзы. Фаза опорного пучка при регистрации второй интерферограммы изменялась на π . Восстановленная по интерферограммам фаза астигматического Гауссова пучка (в). Также восстановленная фаза (г) поля (рис. 2г) на расстоянии $3f$

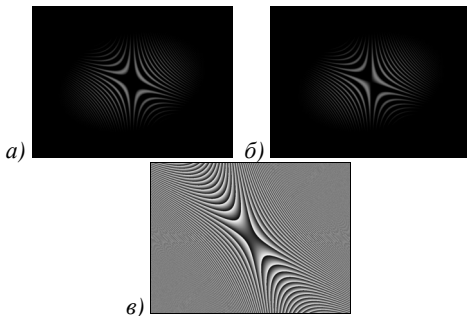


Рис. 4. Рассчитанное распределение интенсивности (а, б) двух интерферограмм, почти совпадающих с экспериментальными (рис. 3а, б). Вторая интерферограмма так же получена при изменении фазовой задержки у плоского опорного пучка на π . Восстановленная из интерферограмм (а, б) фаза астигматического Гауссова пучка (в). Размер кадров 5608×4255 мкм

Далее, чтобы уточнить значение ОУМ ($J_z/W \approx 63$), полученного из экспериментальной фазы (рис. 3в), мы предлагаем использовать новый модельно-экспериментальный метод расчёта ОУМ. Он состоит в следующем. На рис. 4а, б показаны две модельные интерферограммы, которые рассчитывались, чтобы повторить эксперимент на рис. 2б, в. Интерферограммы на рис. 4а, б совпадают по числу полос с экспериментальными интерферограммами на рис. 3а, б. А на рис. 4в показана модельная фаза, восстановленная из двух модельных интерферограмм на рис. 4а, б. У модельной фазы (рис. 4в), во-первых, нет шумов, которые есть у аналогичной экспериментальной фазы (рис. 3в), а во-вторых, она получена не только в той области, где интенсивность больше 0,1 от максимума (как получена экспериментальная фаза на рис. 3в), но и в области размером 14×14 мм (4000×4000 отсчётов). Это важно, так как в ОУМ немалый вклад вносят области пучка, в которых интенсивность мала, но площадь такой области велика и градиент фазы большой (много полос на интерферограмме).

Далее по модельной восстановленной фазе (рис. 4в) и рассчитанной на расстоянии $z = 2f$ интенсивности (на рис. 4 не показана) в области 14×14 мм (4000×4000 отсчётов) по общим формулам (2) и (3) рассчитывался нормированный ОУМ, который был равен:

$$\frac{J_z}{W} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(x, y) dx dy \right] \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I(x, y) dx dy \right]^{-1} \approx 109,63. \quad (28)$$

Теоретический нормированный ОУМ астигматического Гауссова пучка на рис. 2, рассчитанный по формуле (17), равен ($w = 3,5$ мм, $k = 2\pi/\lambda = 11810$ мм⁻¹, $f_1 = 500$ мм, $f = 100$ мм, $z = 200$ мм, $\alpha = \pi/4$):

$$\frac{J_z}{W} = \left(\frac{kw^2 \sin 2\alpha}{8f} \right) \left(\frac{z}{f_1} \right) \left(2 - \frac{z}{f_1} \right) \approx 116. \quad (29)$$

Из сравнения (28) и (29) видно, что значение нормированного ОУМ астигматического пучка на рис. 2, рассчитанного на основе экспериментальных данных (рис. 3) и с помощью модельных данных (рис. 4), отличается от теоретического значения всего на 6%.

Заключение

В работе мы получили следующие результаты. Получены явные выражения для комплексной амплитуды эллиптического Гауссова пучка, сфокусированного цилиндрической линзой. Показано, что при распространении такой пучок вращается, оставаясь Гауссовым эллиптическим пучком. На двойном фокусном расстоянии интенсивность пучка поворачивается на 90 градусов. Получена явная формула для нормированного ОУМ эллиптического пучка Эрмита–Гаусса с номером $(0, n)$, сфокусированного цилиндрической линзой. Теоретическая оценка показывает, что при практически реализуемых параметрах задачи ОУМ такого пучка может достигать значения больше 100 000 на фотон. Максимально достигнутое значение ОУМ равно 10010 [20]. Получено выражение для комплексной амплитуды пучка Эрмита–Гаусса, сфокусированного цилиндрической линзой. Эта амплитуда выражается через многочлен Эрмита с комплексным аргументом. Причём действительным аргументом становится только на горизонтальной декартовой оси, на которой у него расположены n невырожденных изолированных нулей интенсивности. ОУМ такого пучка может быть больше n , если длина Рэлея больше двойного фокусного расстояния цилиндрической линзы, или меньше n , если длина Рэлея меньше двойного фокусного расстояния цилиндрической линзы. Показано, что на двойном фокусном расстоянии и при условии, что длина Рэлея равна двойному фокусному расстоянию, многочлен Эрмита преобразуется в одночлен с максимальным показателем степени n , и n нулей соединяются в один n -кратно вырожденный изолированный ноль. А весь пучок Эрмита–Гаусса преобразуется в пучок Лагерра–Гаусса с номером $(0, n)$, нормированный ОУМ которого равен n .

Экспериментально, с помощью двух интерферограмм, отличающихся задержкой по фазе на π в опорном пучке, была восстановлена фаза эллиптического Гауссова пучка, прошедшего цилиндрическую линзу. По восстановленной фазе и измеренной интенсивности такого лазерного пучка и по общим формулам (2),

(3) был рассчитан нормированный ОУМ ($J_z/W \approx 63$), который отличается от теоретического ($J_z/W = 116$) в 2 раза. С помощью предложенного модельно-экспериментального метода (рассчитываются две интерферограммы, которые почти совпадают с двумя экспериментальными, и восстанавливается модельная фаза) получено уточненное значение ОУМ ($J_z/W \approx 109,63$), которое отличается от теоретического всего на 6%.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства научных организаций (соглашение № 007-ГЗ/43363/26) в параграфе «Формирование эллиптического Гауссова пучка» и Российского научного фонда (грант № 17-19-01186) в параграфе «Эллиптический пучок Эрмита-Гаусса (0, n) после цилиндрической линзы» и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 18-07-01129, 18-07-01380, 17-47-630420, 16-47-630483) в параграфе «Безвихревой пучок с ОУМ». Экспериментальное исследование выполнено А.П. Порфирьевым в рамках гранта Президента РФ поддержки молодых кандидатов наук МК-2390.2017.2.

Литература

- Grier, D. A revolution in optical manipulation / D. Grier // Nature. – 2003. – Vol. 424. – P. 810-816. – DOI: 10.1038/nature01935.
- Kuga, T. Novel optical trap of atoms with a doughnut beam / T. Kuga, Y. Torii, N. Shiokawa, T. Hirano, Y. Shimizu, H. Sasada // Physical Review Letters. – 1997. – Vol. 78, Issue 25. – P. 4713-4716. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4713.
- Bernet, S. Quantitative imaging of complex samples by spiral phase contrast microscopy / S. Bernet, A. Jesacher, S. Fürhapter, C. Maurer, M. Ritsch-Marte // Optics Express. – 2006. – Vol. 14, Issue 9. – P. 3792-3805. – DOI: 10.1364/OE.14.003792.
- Willig, K.I. STED microscopy reveals that synaptotagmin remains clustered after synaptic vesicle exocytosis / K.I. Willig, S.O. Rizzoli, V. Westphal, R. Jahn, S.W. Hell // Nature. – 2006. – Vol. 440. – P. 935-939. – DOI: 10.1038/nature04592.
- Wang, J. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing / J. Wang, J. Yang, I.M. Fazal, N. Ahmed, Y. Yan, H. Huang, Y. Ren, Y. Yue, S. Dolinar, M. Tur, A.E. Willner // Nature Photonics. – 2012. – Vol. 6. – P. 488-496. – DOI: 10.1038/nphoton.2012.138.
- Mair, A. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons / A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, A. Zeilinger // Nature. – 2001. – Vol. 412. – P. 313-316. – DOI: 10.1038/35085529.
- Courtial, J. Gaussian beams with very high orbital angular momentum / J. Courtial, K. Dholakia, L. Allen, M.J. Padgett // Optics Communications. – 1997. – Vol. 144, Issues 4-6. – P. 210-213. – DOI: 10.1016/S0030-4018(97)00376-3.
- Abramochkin, E. Beam transformations and nontransformed beams / E. Abramochkin, V. Volostnikov // Optics Communications. – 1991. – Vol. 83, Issues 1-2. – P. 123-135. – DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
- Izdebskaya, Y. Vortex-bearing array of singular beams with very high orbital angular momentum / Y. Izdebskaya, T. Fadeyeva, V. Shvedov, A. Volyar // Optics Letters. – 2006. – Vol. 31, Issue 17. – P. 2523-2525. – DOI: 10.1364/OL.31.002523.
- Li, Z. Generation of high-order optical vortices with asymmetrical pinhole plates under plane wave illumination / Z. Li, M. Zhang, G. Liang, X. Li, X. Chen, C. Cheng // Optics Express. – 2013. – Vol. 21, Issue 13. – P. 15755-15764. – DOI: 10.1364/OE.21.015755.
- Krenn, M. On small beams with large topological charge / M. Krenn, N. Tischler, A. Zeilinger // New Journal of Physics. – 2016. – Vol. 18. – 033012. – DOI: 10.1088/1367-2630/18/3/033012.
- Zheng, S. Measuring orbital angular momentum (OAM) states of vortex beams with annular gratings / S. Zheng, J. Wang // Scientific Reports. – 2017. – Vol. 7. – 40781. – DOI: 10.1038/srep40781.
- Vieira, J. High orbital angular momentum harmonic generation / J. Vieira, R.M.G.M. Trines, E.P. Alves, R.A. Fonseca, J.T. Mendonca, R. Bingham, P. Norreys, L.O. Silva // Physical Review Letters. – 2016. – Vol. 117, Issue 26. – 265001. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.265001.
- Chen, Y. Generation and characterization of a perfect vortex beam with a large topological charge through a digital micromirror device / Y. Chen, Z. Fang, Y. Ren, L. Gong, R. Lu // Applied Optics. – 2015. – Vol. 54, Issue 27. – P. 8030-8035. – DOI: 10.1364/AO.54.008030.
- Jesacher, A. Holographic optical tweezers for object manipulations at an air-liquid surface / A. Jesacher, S. Fürhapter, C. Maurer, S. Bernet, M. Ritsch-Marte // Optics Express. – 2006. – Vol. 14, Issue 13. – P. 6342-6352. – DOI: 10.1364/OE.14.006342.
- Fickler, R. Quantum entanglement of high angular momenta / R. Fickler, R. Lapkiewicz, W.N. Plick, M. Krenn, C. Schaeff, S. Ramelow, A. Zeilinger // Science. – 2012. – Vol. 338(6107). – P. 640-643. – DOI: 10.1126/science.1227193.
- Campbell, G. Generation of high-order optical vortices using directly machined spiral phase mirrors / G. Campbell, B. Hage, B. Buchler, P.K. Lam // Applied Optics. – 2012. – Vol. 51(7). – P. 873-876. – DOI: 10.1364/AO.51.000873.
- Shen, Y. Generation and interferometric analysis of high charge optical vortices / Y. Shen, G.T. Campbell, B. Hage, H. Zou, B.C. Buchler, P.K. Lam // Journal of Optics. – 2013. – Vol. 15, Issue 4. – 044005. – DOI: 10.1088/2040-8978/15/4/044005.
- Mafakheri, E. Realization of electron vortices with large orbital angular momentum using miniature holograms fabricated by electron beam lithography / E. Mafakheri, A.H. Tavabi, P. Lu, R. Balboni, F. Venturi, C. Menozzi, G.C. Gazzadi, S. Frabboni, A. Sit, R.E. Dunin-Borkowski, E. Karimi, V. Grillo // Applied Physics Letters. – 2017. – Vol. 110, Issue 9. – 093113. – DOI: 10.1063/1.4977879.
- Fickler, R. Quantum entanglement of angular momentum states with quantum number up to 10010 / R. Fickler, G. Campbell, B. Buchler, P.K. Lam, A. Zeilinger // Proceedings of the National Academy of Sciences. – 2016. – Vol. 113, Issue 48. – P. 13642-13647. – DOI: 10.1073/pnas.1616889113.
- Kotlyar, V.V. Vortex-free laser beam with an orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // Computer Optics. – 2017. – Vol. 41(4). – P. 573-576. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-4-573-576.
- Котляр, В.В. Орбитальный угловой момент астигматического Гауссова лазерного пучка / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв // Компьютерная оптика. – 2017. – Т. 41, № 5. – С. 609-616. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-5-609-616.
- Molina-Terriza, G. Observation of the dynamical inversion of the topological charge of an optical vortex / G. Molina-Terriza, J. Recolons, J.P. Torres, L. Torner, E.M. Wright // Physical Review Letters. – 2001. – Vol. 87, Issue 2. – 023902. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.023902.

24. Интегралы и ряды. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 752 с.

25. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Сведения об авторах

Сведения об авторах **Котляр Виктор Викторович** и **Ковалёв Алексей Андреевич** см. стр. 11 этого выпуска.

Порфирьев Алексей Петрович, 1987 года рождения, в 2010 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладные математика и физика». Кандидат физико-математических наук (2013 год). Доцент кафедры технической кибернетики Самарского университета, научный сотрудник лаборатории микро- и нанотехнологий ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, оптическое манипулирование, структурированные лазерные пучки. E-mail: porfirev.alexey@smr.ru.

ГРПТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 9 ноября 2017 г. Окончательный вариант – 22 декабря 2017 г.

ORBITAL ANGULAR MOMENTUM OF AN ASTIGMATIC HERMITE-GAUSSIAN BEAM

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}, A.P. Porfirev^{1,2}

¹ Samara National Research University, Samara, Russia,

² Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia

Abstract

An explicit formula for the normalized orbital angular momentum (OAM) of an elliptical Hermite-Gaussian (HG) beam of orders $(0, n)$ focused by a cylindrical lens is obtained. In modulus, this OAM can be both greater and smaller than n . If the cylindrical lens focuses not an elliptical, but a conventional HG beam, the latter will also have an OAM that can be both larger and smaller in modulus than that of an elliptical HG beam. For $n=0$, this beam converts to an astigmatic Gaussian beam, but, as before, it will still have OAM. With the help of two interferograms, a phase of the astigmatic Gaussian beam is reconstructed, which is then used to calculate the normalized OAM. The values of the OAM calculated by the theoretical formula and using a hybrid method combining modeling with experiment differ only by 6%.

Keywords: orbital angular momentum, elliptical Hermite-Gaussian beam, phase reconstruction.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Orbital angular momentum of an astigmatic Hermite-Gaussian beam. *Computer Optics* 2018; 42(1): 13-21. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-1-13-21.

Acknowledgements: This work was supported by the Federal Agency for scientific organization (agreement 007-Г3/Ч3363/26) in part “Formation of elliptical Gaussian beam” and by the Russian Science Foundation (project #17-19-01186) in part “Elliptical Hermite-Gaussian beam after cylindrical lens”, and by the Russian Foundation for Basic Research (projects ## 18-07-01129, 18-07-01380, 17-47-630420, 16-47-630483). In part “Vortex-free beam with the OAM”. Experimental investigation performed by A.P. Porfirev was funded by the Russian Federation Presidential grant for support of young candidates of sciences (МК-2390.2017.2).

References

- [1] Grier D. A revolution in optical manipulation. *Nature* 2003; 424: 810-816. DOI: 10.1038/nature01935.
- [2] Kuga T, Torii Y, Shiokawa N, Hirano T, Shimizu Y, Sasada H. Novel optical trap of atoms with a doughnut beam. *Phys Rev Lett* 1997; 78(25): 4713-4716. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.4713.
- [3] Bernet S, Jesacher A, Fürhapter S, Maurer C, Ritsch-Marte M. Quantitative imaging of complex samples by spiral phase contrast microscopy. *Opt Express* 2006; 14(9): 3792-3805. DOI: 10.1364/OE.14.003792.
- [4] Willig KI, Rizzoli SO, Westphal V, Jahn R, Hell SW. STED microscopy reveals that synaptotagmin remains clustered after synaptic vesicle exocytosis. *Nature* 2006; 440: 935-939. DOI: 10.1038/nature04592.
- [5] Wang J, Yang J, Fazal IM, Ahmed N, Yan Y, Huang H, Ren Y, Yue Y, Dolinar S, Tur M, Willner AE. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing. *Nat Photon* 2012; 6: 488-496. DOI: 10.1038/nphoton.2012.138.
- [6] Mair A, Vaziri A, Weihs G, Zeilinger A. Entanglement of the orbital angular momentum states of photons. *Nature* 2001; 412: 313-316. DOI: 10.1038/35085529.
- [7] Courtial J, Dholakia K, Allen L, Padgett MJ. Gaussian beams with very high orbital angular momentum. *Opt Commun* 1997; 144(4-6): 210-213. DOI: 10.1016/S0030-4018(97)00376-3.
- [8] Abramochkin E, Volostnikov V. Beam transformations and nontransformed beams. *Opt Commun* 1991; 83(1-2): 123-135. DOI: 10.1016/0030-4018(91)90534-K.
- [9] Izdebskaya Y, Fadeyeva T, Shvedov V, Volyar A. Vortex-bearing array of singular beams with very high orbital angular momentum. *Opt Lett* 2006; 31(17): 2523-2525. DOI: 10.1364/OL.31.002523.

- [10] Li A, Zhang M, Liang G, Li X, Chen X, Cheng C. Generation of high-order optical vortices with asymmetrical pinhole plates under plane wave illumination. *Opt Express* 2013; 21(13): 15755-15764. DOI: 10.1364/OE.21.015755.
- [11] Krenn M, Tischler N, Zeilinger A. On small beams with large topological charge. *New J Phys* 2016; 18: 033012. DOI: 10.1088/1367-2630/18/3/033012.
- [12] Zheng S, Wang J. Measuring orbital angular momentum (OAM) states of vortex beams with annular gratings. *Sci Rep* 2017; 7: 40781. DOI: 10.1038/srep40781.
- [13] Vieira J, Trines RMGM, Alves EP, Fonseca RA, Mendonca JT, Bingham R, Norreys P, Silva LO. High orbital angular momentum harmonic generation. *Phys Rev Lett* 2016; 117: 265001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.265001.
- [14] Chen Y, Fang Z, Ren Y, Gong L, Lu R. Generation and characterization of a perfect vortex beam with a large topological charge through a digital micro-mirror device. *Appl Opt* 2015; 54(27): 8030-8035. DOI: 10.1364/AO.54.008030.
- [15] Jesacher A, Furhapter S, Maurer C, Bernet S, Ritsch-Marte M. Holographic optical tweezers for object manipulations at an air-liquid surface. *Opt Express* 2006; 14(13): 6342-6352. DOI: 10.1364/OE.14.006342.
- [16] Fickler R, Lapkiewicz R, Plick WN, Krenn M, Schaeff C, Ramelow S, Zeilinger A. Quantum entanglement of high angular momenta. *Science* 2012; 338(6107): 640-643. DOI: 10.1126/science.1227193.
- [17] Campbell G, Hage B, Buchler B, Lam PK. Generation of high-order optical vortices using directly machined spiral phase mirrors. *Appl Opt* 2012; 51(7): 873-876. DOI: 10.1364/AO.51.000873.
- [18] Shen Y, Campbell GT, Hage B, Zou H, Buchler BC, Lam PK. Generation and interferometric analysis of high charge optical vortices. *J Opt* 2013; 15(4): 044005. DOI: 10.1088/2040-8978/15/4/044005.
- [19] Mafakheri E, Tavabi AH, Lu P, Balboni R, Venturi F, Menozzi C, Gazzadi GC, Frabboni S, Sit A, Dunin-Borkowski RE, Karimi E, Grillo V. Realization of electron vortices with large orbital angular momentum using miniature holograms fabricated by electron beam lithography. *Appl Phys Lett* 2017; 110(9): 093113. DOI: 10.1063/1.4977879.
- [20] Fickler R, Campbell G, Buchler B, Lam PK, Zeilinger A. Quantum entanglement of angular momentum states with quantum number up to 10010. *Proc Natl Acad Sci* 2016; 113(48): 13642-13642-13647. DOI: 10.1073/pnas.1616889113.
- [21] Kotlyar VV, Kovalev AA. Vortex-free laser beam with an orbital angular momentum. *Computer Optics* 2017; 41(4): 573-576. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-4-573-576.
- [22] Kotlyar VV, Kovalev AA. Orbital angular momentum of an astigmatic Gaussian laser beam. *Computer Optics* 2017; 41(5): 609-616. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-5-609-616.
- [23] Molina-Terriza G, Rekolons J, Torres JP, Torner L, Wright EM. Observation of the dynamical inversion of the topological charge of an optical vortex. *Phys Rev Lett* 2001; 87(2): 023902. DOI: 10.1103/PhysRevLett.87.023902.
- [24] Prudnikov AP, Brychkov YA, Marichev OI. *Integrals and Series, Special Functions*. Amsterdam, Netherlands: Gordon and Breach; 1986. ISBN: 2-88124-097-6.
- [25] Abramowitz M, Stegun IA. *Handbook of mathematical functions*. National Bureau of Standards, Applied Math Series; 1979.

Author's information

The information about authors **Victor Victorovich Kotlyar** and **Alexey Andreevich Kovalev** you can find on page 12 of this issue.

Alexey Petrovich Porfirev (b. 1987) graduated (2010) from Samara National Research University, majoring in Applied Physics and Mathematics. He holds the Candidate's Degree in Physics and Mathematics (2013). Currently he is an associate professor at Technical Cybernetics department of Samara National Research University and a researcher at Micro- and Nanotechnologies laboratory of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. His current research interests include diffractive optics, optical manipulation and structured laser beams.

Received November 9, 2017. The final version – December 22, 2017.
