

## Методы определения орбитального углового момента лазерного пучка

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>, А.П. Порфирьев<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

Предложены и исследованы численно и экспериментально два метода определения орбитального углового момента парааксиальных лазерных пучков. Один метод основан на регистрации интенсивности в зоне Френеля, численном усреднении этой интенсивности по углу на дискретных радиусах и решении линейной системы уравнений для нахождения квадратов модулей коэффициентов разложения светового поля по базисным функциям. Другой метод основан на регистрации двух распределений интенсивности в Фурье-плоскости двух цилиндрических линз, повернутых друг относительно друга на 90°, и вычислении моментов первого порядка для измеренных интенсивностей. Экспериментальная ошибка определения небольших дробных значений орбитального углового момента (до 4) – около 1%, а для больших дробных значений (до 30) – около 8%.

**Ключевые слова:** парааксиальный лазерный пучок, дробный орбитальный угловой момент, дробный топологический заряд, оптический вихрь, цилиндрическая линза, суперпозиция пространственных мод.

**Цитирование:** Котляр, В.В. Методы определения орбитального углового момента лазерного пучка / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 1. – С. 42–53. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-1-42-53.

### Введение

Оптические вихри, или лазерные пучки с орбитальным угловым моментом (ОУМ), интенсивно изучаются в настоящее время и имеют широкое применение в задачах оптической беспроводной связи, квантовой информации, зондирования атмосферы и микроманипуляции [1, 2]. Им посвящаются современные обзоры [3, 4] и монографии [5].

Поэтому актуально разрабатывать простые и эффективные методы, позволяющие измерять ОУМ таких лазерных пучков. Известно, что ОУМ парааксиальных лазерных пучков можно измерять с помощью многопорядковых дифракционных оптических элементов [6, 7], дифракционной трансформационной оптики [8], метаповерхностей [9], цилиндрической [10–14] или астигматической [15] линз, интерферограмм [16–18], треугольной апертуры [19] и кольцевой дифракционной решётки [20].

Правда, не все перечисленные выше методы применимы для определения как целого ОУМ, так и дробного. Любой ОУМ можно измерять с помощью цилиндрической линзы, интенсивности и расчёта моментов интенсивности [13, 14, 21].

В [21] предложено измерять орбитальный угловой момент парааксиального лазерного пучка с помощью моментов интенсивности. Эта работа вдохновила нас, и мы модернизировали и упростили метод, предложенный в [21], так, что по измерению всего одного распределения интенсивности в любой поперечной плоскости пучка мы можем определить (измерить) ОУМ. Метод позволяет измерять как целый, так и дробный ОУМ. Ограничение метода состоит только в том, что применим он к тем лазерным пучкам, которые можно с хорошей точностью аппроксимировать

конечной суперпозицией мод Лагерра–Гаусса (ЛГ) с номерами  $(n, 0)$ . Второй метод, рассмотренный в этой работе, основан на методе, предложенном в [13, 14]. Но в этих работах авторы использовали только одну цилиндрическую линзу, которой достаточно для пучков с радиальной симметрией. Для произвольных лазерных пучков нужно использовать две цилиндрические линзы. Заметим здесь, что метод [13, 14] приближённый (смотри Приложение).

### 1. Определение ОУМ по измерению одного распределения интенсивности пучка

Пусть, аналогично [21], комплексная амплитуда лазерного пучка в некоторой плоскости, перпендикулярной оптической оси  $z$ , описывается выражением:

$$E(r, \varphi, z) = \sum_{n=-N}^N C_n \exp(in\varphi) \Psi_n(r, z), \quad (1)$$

где  $(r, \varphi)$  – полярные координаты,  $C_n$  – неизвестные постоянные, подлежащие определению,  $\Psi_n(r, z)$  – радиальная амплитуда ЛГ-моды с номерами  $(n, 0)$  [22]:

$$\Psi_n(r, z) = \frac{-iw_0}{w(z)} \left( \frac{r\sqrt{2}}{w(z)} \right)^n \times \exp \left[ \frac{-r^2}{w^2(z)} + \frac{ikr^2}{2R(z)} - i(2n+1) \arctg \left( \frac{z}{z_0} \right) \right], \quad (2)$$

$z_0 = kw_0^2/2$  – длина Рэлея,  $w(z) = w_0(1+z^2/z_0^2)^{1/2}$  – радиус Гауссова пучка и  $R(z) = z(1+z_0^2/z^2)$  – радиус кривизны волнового фронта Гауссова пучка. Из (1) следует, что не любую функцию можно аппроксимировать такой конечной суммой, но многие вихревые лазерные пучки, которые встречаются на практике,

например, в оптических системах связи [23], описываются выражениями (1).

Вместо (2), в качестве базисных функций можно выбрать радиальные функции квазимодовых пучков Бесселя – Гаусса (БГ) [24]:

$$\Psi_{ln}(r, z) = q^{-1}(z) J_n \left( \frac{\alpha r}{q(z)} \right) \times \exp \left[ \frac{-r^2}{w_0^2 q(z)} + ikz - \frac{i\alpha^2 z}{2kq(z)} \right], \quad (3)$$

где  $q(z) = 1 + iz/z_0$ ,  $J_n(x)$  – функция Бесселя  $n$ -го порядка,  $\alpha$  – масштабный параметр функции Бесселя. Из-за того, что функции (3) имеют два масштабных параметра ( $\alpha, w_0$ ), в отличие от (1), использование их для аппроксимации светового поля (1) предпочтительнее.

Далее запишем интенсивность поля (1):

$$I(r, \varphi, z) = |E(r, \varphi, z)|^2 = \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N C_n \bar{C}_m \exp[i(n-m)\varphi] \Psi_n(r, z) \bar{\Psi}_m(r, z), \quad (4)$$

где  $\bar{C}_m, \bar{\Psi}_m$  – комплексно-сопряжённые величины. Вычислим интеграл по угловой переменной от обеих частей равенства (4):

$$\tilde{I}(r, z) = \int_0^{2\pi} I(r, \varphi, z) d\varphi = 2\pi \sum_{n=-N}^N |C_n|^2 |\Psi_n(r, z)|^2. \quad (5)$$

Измеряя интенсивность светового поля  $I(r, \varphi, z)$  ПЗС-матрицей и суммируя значения интенсивности на  $2N$  радиусах  $r_m$ , вместо (5) получим систему  $2N \times 2N$  линейных алгебраических уравнений:

$$\tilde{I}_m = \sum_{n=-N}^N M_{nm} x_n, \quad m = \overline{-N, N}, \quad (6)$$

где  $\tilde{I}_m = \tilde{I}(r_m, z)$  – усреднённая по углу интенсивность на радиусах  $r_m$ ,  $M_{nm} = |\Psi_n(r_m, z)|^2$  – известные из теории значения квадратов модулей базисных функций, например, (2) или (3),  $x_n = |C_n|^2$  – неизвестные величины, квадраты модулей коэффициентов разложения (1). Решая систему уравнений (6) каким-либо из известных методов, можно найти квадраты модулей всех коэффициентов в (1). Заметим, что для однозначного решения системы (6) требуется выполнение следующего условия на радиальные базисные функции в (1):  $|\Psi_n(r, z)| \neq |\Psi_{-n}(r, z)|$ ,  $n \in [-N, N]$ . Чтобы удовлетворить этому условию, можно выбрать в качестве базисных функций в (1), например, функции вида:

$$\Psi_n(r, z=0) = A_n \exp \left[ -(r-r_n)^2 / w_0^2 \right],$$

где  $r_n = r_0 + n\Delta$ ,  $n \in [-N, N]$ ,  $A_n$  – нормировочная постоянная.

Для базисных функций (2) и (3) система уравнений (6) может быть однозначно решена при  $n \in [-N, 0]$  или  $n \in [0, N]$ .

Далее получим формулу определения ОУМ параксиального светового поля (1). Будем исходить из из-

вестных определений проекции на оптическую ось вектора полного ОУМ  $J_z$  и полной энергии (мощности) светового поля  $W$  [7]:

$$J_z = \text{Im} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \bar{E}(r, \varphi, z) \left( \frac{\partial E(r, \varphi, z)}{\partial \varphi} \right) r dr d\varphi, \quad (7)$$

$$W = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E(r, \varphi, z) \bar{E}(r, \varphi, z) r dr d\varphi. \quad (8)$$

Подставим (1) в (7) и (8) и получим нормированный полный ОУМ пучка (1) в виде:

$$\frac{J_z}{W} = \frac{\sum_{n=-N}^N n |C_n|^2 I_n}{\sum_{n=-N}^N |C_n|^2 I_n}, \quad (9)$$

где  $I_n = \int_0^\infty |\Psi_n(r, z)|^2 r dr$  – мощность каждого из пучков в линейной комбинации (1). Из (9) видно, что для определения ОУМ нужно найти из измерений только квадраты модулей коэффициентов в (1), а их фазы знать не надо. Квадраты модулей коэффициентов в (1) находятся из решения системы уравнений (6)  $x_n = |C_n|^2$ , а мощности каждого из пучков  $I_n$  рассчитываются по известному виду выбранного базиса разложения (2) или (3), с учетом сделанных замечаний.

## 2. Определение ОУМ по измерению интенсивности в фокусе двух цилиндрических линз

В [13, 14] предложено определять ОУМ по измерению одного распределения интенсивности в фокусе цилиндрической линзы. Но этот метод работает только для оптических вихрей с круговой симметрией радиальной компоненты пучка, то есть если амплитуда пучка представима в виде:

$$E_n(r, \varphi, z) = \exp(-in\varphi) \Psi(r, z), \quad (10)$$

где  $(r, \varphi, z)$  – цилиндрические координаты, а также для оптического вихря с дробным топологическим зарядом, у которого вместо целого  $n$  в (10) действительное число  $\mu$ :

$$E_\mu(r, \varphi, z) = \exp(-i\mu\varphi) \Psi(r, z). \quad (11)$$

Ниже описывается простое обобщение данного метода, когда ОУМ любого параксиального светового поля определяется по измерению двух распределений интенсивности в Фурье-плоскостях двух цилиндрических линз, повернутых относительно друг друга на  $90^\circ$  и расположенных в разных ветвях пучка, после его разделения делительным кубиком на два одинаковых пучка (рис. 1).

ОУМ (7) можно переписать в декартовых координатах в виде:

$$J_z = \text{Im} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \bar{E}(x, y, z) \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) E(x, y, z) dx dy. \quad (12)$$

Подставляя в (12) комплексную амплитуду  $E(x, y, z)$  в виде одномерного преобразования Фурье отдельно по каждой декартовой координате в виде

$$E(x, y) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi f}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_y(\eta, y) \exp\left(\frac{ik\eta x}{f}\right) d\eta, \quad (13)$$

$$E(x, y) = \sqrt{\frac{ik}{2\pi f}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_x(x, \xi) \exp\left(\frac{ik\xi y}{f}\right) d\xi, \quad (14)$$

где  $k$  – волновое число света,  $f$  – фокусное расстояние цилиндрических линз, получим вместо (12) выражение:

$$J_z = \frac{k}{f} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\xi |\hat{E}_y(x, \xi, z)|^2 dx d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta y |\hat{E}_x(\eta, y, z)|^2 d\eta dy \right), \quad (15)$$

где в (13)–(15)  $\hat{E}_y(x, \xi, z)$ ,  $\hat{E}_x(\eta, y, z)$  – одномерные Фурье-образы по поперечным декартовым координатам  $y$  и  $x$  соответственно. В (15) координаты  $x, \xi, y, \eta$  берутся вдоль осей декартовых координат в плоскости фокуса цилиндрических линз. При этом координаты  $x$  и  $y$ , по которым не выполняется преобразование Фурье (13) и (14), остаются такими же, как в плоскости цилиндрических линз. Заметим, что определение ОУМ по формуле (15) требует измерения двух распределений интенсивности в фокальных плоскостях двух цилиндрических линз, а определение ОУМ по формулам (6) и (9) требует измерения только одного распределения интенсивности. Но преимущество подхода (15) перед подходом (6), (9) в том, что он применим к любому параксиальному световому полю, а не только к световым полям, которые являются суперпозицией конечного числа мод Лагерра–Гаусса ( $n, 0$ ) (2) или Бесселя–Гаусса (3). Заметим, что выражение (15) не точное, а точная формула получена в Приложении. Эта точная формула (A5) не позволяет вычислить ОУМ по данным эксперимента. Но приближённое выражение (15) даёт почти точный результат (отклонение от точного около 1–4%) для случая параксиального распространения исследуемого пучка.

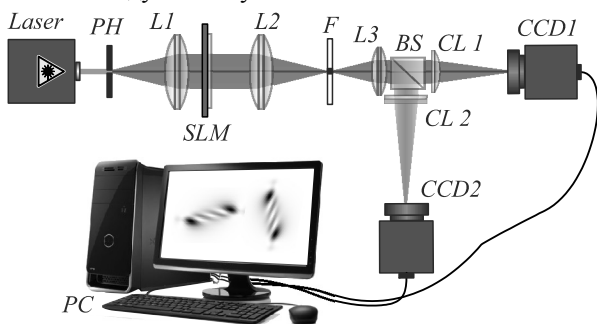


Рис. 1. Схема измерения ОУМ с помощью двух цилиндрических линз: Laser – лазер, PH – непрозрачный экран с круглым отверстием, L1, L2, L3 – сферические линзы, SLM – модулятор, формирующий пучок, F – пространственный фильтр, блокирующий нулевой дифракционный порядок, содержащий излучение, непромодулированное модулятором света, BS – кубик, разделяющий пучок на два одинаковых пучка, CL1, CL2 – цилиндрические линзы, повернутые по отношению друг к другу на 90°, CCD1, CCD2 – ПЗС-камеры, PC – компьютер

### 3. Параксиальные лазерные пучки с дробным ОУМ

Оптические вихри могут иметь как целый, так и дробный ОУМ. Но пучки с дробным ОУМ могут иметь разную природу. Например, в [25] подробно разобрана структура оптического вихря с дробным топологическим зарядом (11). А в [26] получена точная формула для дробного ОУМ таких вихрей. Такой оптический вихрь имеет дробный ОУМ, если  $\mu$  не целое число, причём в центре такого пучка (на оптической оси) нет изолированного нуля (нет сингулярности), но вблизи одной из поперечных декартовых координат имеет место цепочка (конечная или бесконечная) изолированных нулей с топологическими зарядами +1 и –1. По мере распространения такого вихря в свободном пространстве эти изолированные нули могут взаимно аннигилировать [25]. Подобным образом ведут себя изолированные нули в асимметричных пучках Бесселя [27], пучках Бесселя–Гаусса, модах Ломмеля [5]. У всех этих пучков ОУМ дробный, и на поперечной оси имеет место цепочка изолированных нулей с топологическими зарядами +1 и –1.

С другой стороны, пучок с дробным ОУМ можно сформировать с помощью линейной комбинации конечного числа обычных мод Лагерра–Гаусса (1), (2) или Бесселя–Гаусса (3). В этом случае структура пучка может при распространении сохраняться (с точностью до изменения масштаба и вращения). Число изолированных нулей интенсивности у таких пучков конечно, оно определяется числом  $N$  слагаемых в (1).

Для оптического вихря с дробным топологическим зарядом (11) в [26] на основе квантового формализма получена формула для дробного ОУМ такого пучка. Ниже мы получим её для обычных, а не квантовых вихрей. Разложим оптический вихрь с дробным топологическим зарядом по оптическим вихрям с целыми топологическими зарядами:

$$E_\mu(r, \varphi, z) = \exp(-i\mu\varphi)\Psi(r, z) = \frac{e^{i\pi\mu}}{\pi} \Psi(r, z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{\mu - n}. \quad (16)$$

Подставим правую часть (16) в (7), получим:

$$J_z = W \frac{\sin^2(\pi\mu)}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n}{(\mu - n)^2}, \quad (17)$$

где  $W$  – энергия (мощность) пучка, определённая (8). Ряд в правой части (17) можно свести к справочному ряду [28]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 \pm a^2)^2} = \frac{\pi}{4a} \left[ \pm \left\{ \operatorname{cth} \pi a \right\} \mp a \left\{ \operatorname{cosech}^2 \pi a \right\} \right], \quad (18)$$

с помощью которого можно получить окончательное выражение для нормированного ОУМ поля (11) [26]:

$$\frac{J_z}{W} = \mu - \frac{\sin 2\pi\mu}{2\pi}. \quad (19)$$

Из (19) следует, что ОУМ равен топологическому заряду  $\mu$ , только если  $\mu$  целое или полуцелое число. В [13] формула (19) подтверждена экспериментально для  $n < 3$ .

3.1. Гауссов оптический вихрь с дробным топологическим зарядом

Получим выражение для комплексной амплитуды в зоне Френеля, описывающей Гауссов пучок, прошедший через СФП с дробным топологическим зарядом. Амплитуда такого пучка в начальной плоскости описывается выражением:

$$E_{\text{уг}}(r, \phi, z = 0) = \exp\left(i\mu\phi - \frac{r^2}{w_0^2}\right). \quad (20)$$

Тогда на расстоянии  $z$  от начальной плоскости с помощью преобразования Френеля получим комплексную амплитуду поля (20) в виде:

$$E_{\text{уг}}(\rho, \theta, z) = \left(\frac{-iz_0}{zq_1(z)}\right) \left(\frac{e^{i\mu\pi} \sin \mu\pi}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{\frac{ik\rho^2}{2z}} \times \sqrt{x} e^{-x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-i)^n e^{in\theta}}{\mu - n} [I_{(n-1)/2}(x) - I_{(n+1)/2}(x)], \quad (21)$$

где

$$q_1(z) = 1 - \frac{iz_0}{z}, \quad x = \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \left(\frac{\rho}{w_0}\right)^2 \left(\frac{1}{8q_1(z)}\right),$$

$I_\nu(x)$  – модифицированная функция Бесселя с целым и полуцелым порядком. При получении (21) был использован справочный интеграл [28]:

$$\int_0^\infty e^{-pr^2} r J_n(cr) dr = \frac{c\sqrt{\pi}}{8p^{3/2}} \times e^{-\frac{c^2}{8p}} \left[ I_{(n-1)/2}\left(\frac{c^2}{8p}\right) - I_{(n+1)/2}\left(\frac{c^2}{8p}\right) \right]. \quad (22)$$

Из (21) видно, что на оптической оси ( $\rho=0$ ) будет нулевая интенсивность, и распределение интенсивности не будет иметь круговую симметрию. Аргумент модифицированных функций Бесселя в (21) комплексный, и только в дальней зоне ( $z \gg z_0$ ) аргумент становится действительным. ОУМ поля (21) будет такой же, как и у начального поля (20), и равен (19).

3.2. Бесселев оптический вихрь с дробным топологическим зарядом

Рассмотрим еще один пример оптического вихря с дробным топологическим зарядом. Пусть СФП с дробным топологическим зарядом освещается узким кольцевым пучком, тогда комплексная амплитуда такого поля в начальной плоскости будет равна:

$$E_{\text{уб}}(r, \phi, z = 0) = r_0 \exp(i\mu\phi) \delta(r - r_0), \quad (23)$$

где  $r_0$  – радиус светового кольца,  $\delta(x)$  – дельта-функция Дирака. Тогда на расстоянии  $z$  от начальной плоскости комплексная амплитуда пучка Бесселя с дробным топологическим зарядом будет иметь вид:

$$E_{\text{уб}}(\rho, \theta, z) = \left(\frac{-ikr_0^2}{z}\right) \left(\frac{e^{i\mu\pi} \sin \mu\pi}{\pi}\right) \times \exp\left[\frac{ik}{2z}(\rho^2 + r_0^2)\right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-i)^n e^{in\theta}}{\mu - n} J_n\left(\frac{kr_0\rho}{2z}\right), \quad (24)$$

где  $J_n(x)$  – функция Бесселя  $n$ -го порядка. ОУМ поля (24) такой же, как у поля (23), и равен (19). Заметим, что у поля (24) на оптической оси ( $\rho=0$ ) нет нуля интенсивности. Ноль интенсивности на оси в (24) будет только тогда, когда  $\mu$  – целое. Действительно, если  $\mu$  – нецелое, то на оси ( $\rho=0$ ) отличным от нуля будет только нулевое слагаемое в сумме в (24), так как  $J_0(0)=1$ . А если  $\mu$  – целое, то и это слагаемое будет равно нулю, так как синус перед суммой в (24) будет равен нулю.

Оптический вихрь с дробным топологическим зарядом (11) является суперпозицией счётного числа оптических вихрей с целым топологическим зарядом. Напротив, световое поле (1) состоит из конечного числа оптических вихрей с целым топологическим зарядом. Для того, чтобы у поля (1) был дробный ОУМ, достаточно всего двух слагаемых. Действительно, если в (13) мощности отдельных пучков нормировать на единицу  $I_n = \int_0^\infty |\Psi_n(r, z)|^2 r dr = 1$  и сумму квадратов модулей всех коэффициентов в (1) также положить равной 1:  $\sum_{n=-N}^N |C_n|^2 = 1$ , то выражение (13) для двух слагаемых с топологическими зарядами  $n$  и  $m$  будет иметь вид ( $W=1$ ):

$$J_z = na + m(1 - a), \quad a = |C|^2 \leq 1. \quad (25)$$

Из (25) видно, что если  $a$  – иррациональное число, меньшее единицы, то достаточно сложения двух оптических вихрей с целыми топологическими зарядами, чтобы сформировать пучок с дробным ОУМ.

**4. Моделирование**

Далее мы численно и потом экспериментально проверим оба предложенных метода определения ОУМ (6), (9) и (15) на примере светового поля (11), которое будет формироваться с помощью фазы вида  $\mu\phi$ , генерируемой на дисплее жидкокристаллического модулятора света.

4.1. Расчёт ОУМ поля, сформированного СФП с дробным топологическим зарядом

Моделирование проводилось с помощью численного вычисления преобразования Френеля. Параметры расчёта: длина волны  $\lambda=532$  нм, радиус пегретажки Гауссова пучка  $w_0=1$  мм, фокусное расстояние цилиндрической линзы  $f=1$  м, расчётная область:  $-R \leq x, y \leq R$ , ( $R=5$  мм),  $z=f$ , шаг дискретизации по обеим координатам  $\Delta x = \Delta y = 20$  мкм.

На рис. 2 приведены распределения фазы (рис. 1а, з, ж, к) в начальной плоскости  $z=0$ , а также интенсивности в фокусе цилиндрической линзы, ось которой параллельна оси  $x$  (рис. 2б, д, з, л) и  $y$  (рис. 2в, е, и, м) для Гауссова пучка, прошедшего через СФП с топологическим зарядом, равным 3,00 (рис. 2а–в), 3,25 (рис. 2г–е), 3,50 (рис. 2ж–и) и 3,75 (рис. 2к–м). Интенсивности в фокусе цилиндрической линзы (рис. 2б, в, д, е, з, и, л, м) показаны в области  $-R/2 \leq x, y \leq R/2$ .

Согласно формуле (19), нормированный ОУМ при выбранных значениях топологического заряда дол-

жен быть равен 3,00; 3,09; 3,50; и 3,91. При расчёте по формуле (15) по распределениям интенсивности с рис. 2 были получены значения соответственно 2,98 (1,50+1,48), 3,06 (1,46+1,60), 3,45 (1,70+1,75) и 3,87 (2,00+1,87). Ошибка составила соответственно 0,7%, 1%, 1,4% и 1%. Здесь и далее представление ОУМ в

виде суммы двух слагаемых соответствует слагаемым в формуле (15). Это сделано для того, чтобы показать, что эти слагаемые дают разный вклад в ОУМ (хотя и близкий). В [13, 14] предполагалось, что вклад в ОУМ обоих слагаемых в (15) одинаковый, но противоположный по знаку.

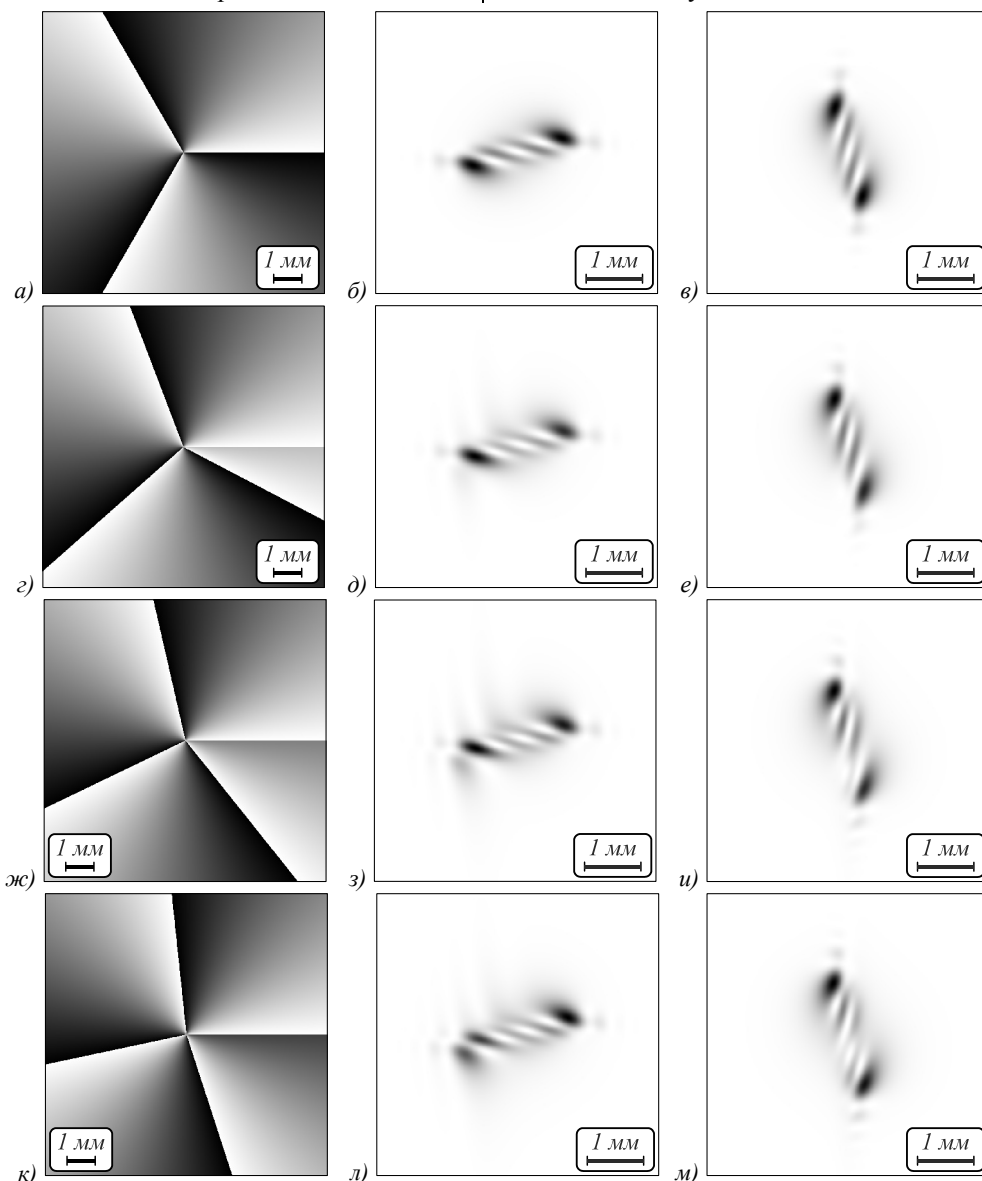


Рис. 2. Распределения фазы (а, г, ж, к) в начальной плоскости  $z = 0$ , а также интенсивности (негатив) в фокусе цилиндрической линзы, ось которой параллельна оси  $x$  (б, д, з, л) и  $y$  (в, е, и, м) для Гауссова пучка, прошедшего через СФП с топологическим зарядом, равным 3,00 (а–в), 3,25 (г–е), 3,50 (ж–и) и 3,75 (к–м)

Аналогично, с помощью вычисления преобразования Френеля проводилось моделирование измерения большого дробного значения ОУМ. В этом случае оптический вихрь расходится сильнее и потому потребовалось увеличение размеров расчётной области  $R$  и уменьшение шагов дискретизации  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . Параметры расчёта: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки  $w_0 = 1$  мм, фокусное расстояние цилиндрической линзы  $f = 1$  м, расчётная область:  $-R \leq x, y \leq R$ , ( $R = 10$  мм),  $z = f$ , шаг дискретизации по обеим координатам  $\Delta x = \Delta y = 10$  мкм.

На рис. 3 приведены распределения фазы (рис. 3а) в начальной плоскости  $z = 0$ , а также интенсивности в фокусе цилиндрической линзы, ось которой параллельна оси  $x$  (рис. 3б) и  $y$  (рис. 3в) для Гауссова пучка, прошедшего через СФП с топологическим зарядом, равным 30,3.

Согласно формуле (19), нормированный ОУМ при топологическом заряде, равном 30,3, должен быть равен 30,15. При расчёте по формуле (15) по распределениям интенсивности с рис. 3 было получено значение 28,87 (14,31 + 14,56), то есть ошибка составила 4%.

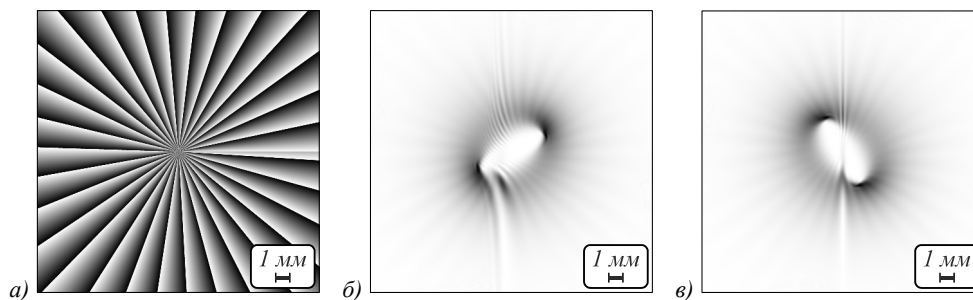


Рис. 3. Распределения фазы (а) в начальной плоскости  $z=0$ , а также интенсивности (негатив) в фокусе цилиндрической линзы, ось которой параллельна оси  $x$  (б) и  $y$  (в) для Гауссова пучка, прошедшего через СФП с топологическим зарядом 30,3

4.2. Расчёт дробного ОУМ суперпозиции мод ЛГ

Далее с помощью формулы (9) мы можем сконструировать световое поле с заданным значением ОУМ. Например, подберём суперпозиции мод Лагерра–Гаусса (2) порядков (0, 2) и (0, 4) так, чтобы их нормированный ОУМ был равен 3 и 3,5, то есть построим поля вида:

$$E(r, \varphi, z=0) = \left[ \frac{C_2}{\sqrt{\pi w_0^2}} \exp(2i\varphi) \left( \frac{r\sqrt{2}}{w_0} \right)^2 + \frac{C_4}{\sqrt{12\pi w_0^2}} \exp(4i\varphi) \left( \frac{r\sqrt{2}}{w_0} \right)^4 \right] \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right). \tag{26}$$

Множители  $1/(\pi w_0^2)^{1/2}$  и  $1/(12\pi w_0^2)^{1/2}$  введены для того, чтобы энергии обеих мод были одинаковыми. Согласно (9), при  $C_2=1, C_4=1$  должно быть  $J_z/W=3$ , а при  $C_2=1, C_4=3^{1/2}$  должно быть  $J_z/W=3,5$ .

Моделирование проводилось также с помощью численного преобразования Фурье. Параметры расчёта: длина волны  $\lambda=532$  нм, радиус перетяжки  $w_0=1$  мм, фокусное расстояние цилиндрической линзы  $f=1$  м, расчётная область:  $-R \leq x, y \leq R, (R=5$  мм),

$z=f$ , шаг дискретизации по обеим координатам  $\Delta x=\Delta y=20$  мкм.

На рис. 4 приведены распределения интенсивности (рис. 4а, д) и фазы (рис. 4б, е) в начальной плоскости  $z=0$ , а также интенсивности в фокусе цилиндрической линзы, ось которой параллельна оси  $x$  (рис. 4в, ж) и  $y$  (рис. 4з, з) для суперпозиций мод ЛГ с нормированным ОУМ, равным 3 (рис. 4а–з) и 3,5 (рис. 4д–з). Интенсивности в фокусе цилиндрической линзы (рис. 4в, з, ж, з) показаны в области  $-R/2 \leq x, y \leq R/2$ .

При расчёте по формуле (15) по распределениям интенсивности с рис. 4 были получены значения ОУМ соответственно 2,99 (2,35+0,64) и 3,49 (2,49+1,00). Ошибка в обоих случаях составила 0,3%. Заметим, что вклад каждого из слагаемых в (15) по модулю отличается более, чем в 2 раза.

Для пучков, показанных на рис. 4, ОУМ был также рассчитан по формулам (6) и (9). При расчёте ОУМ предполагалось, что в пучке имеется 5 мод с топологическими зарядами от  $m=1$  до  $m=5$ . В качестве радиусов  $r_m$  выбирались значения  $m\Delta r (m=1, \dots, 5)$  так, чтобы в круге радиусом  $5\Delta r$  содержалось 80% энергии пучка (рис. 5а).

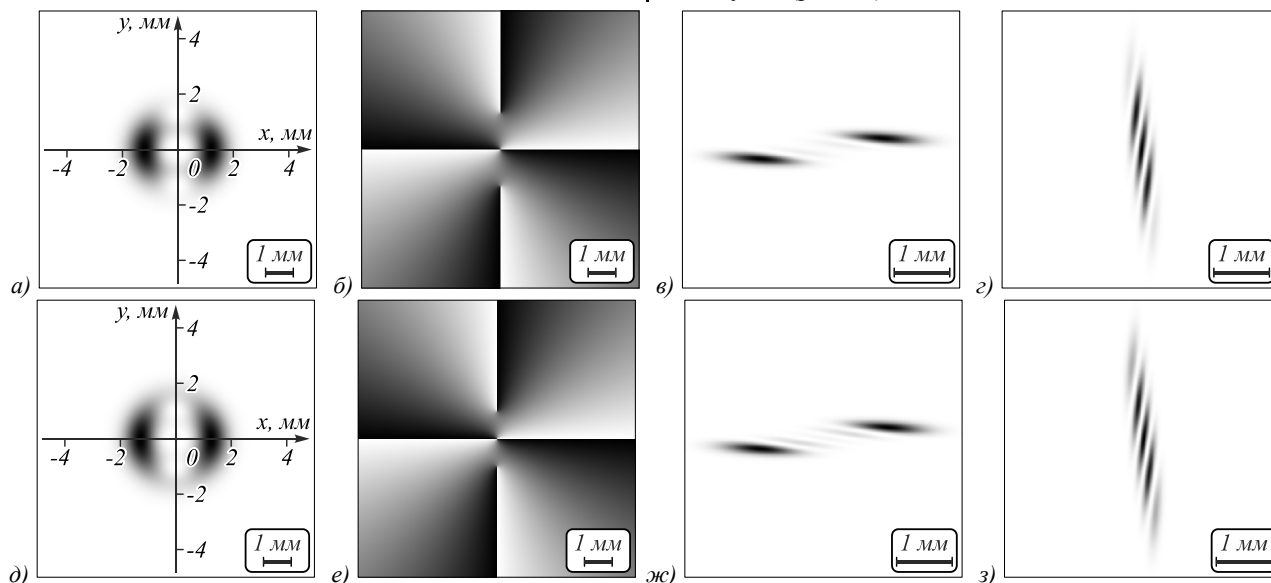


Рис. 4. Распределения интенсивности (негатив) (а, д) и фазы (б, е) в начальной плоскости  $z=0$ , а также интенсивности (негатив) в фокусе цилиндрической линзы, ось которой параллельна оси  $x$  (в, ж) и  $y$  (з, з) для суперпозиций мод ЛГ с нормированным ОУМ, равным 3 (а–з) и 3,5 (д–з)

Для пучка на рис. 4а–з значения коэффициентов в суперпозиции (1) равны  $C_1=0$ ;  $C_2=1$ ;  $C_3=0$ ;  $C_4=1$ ;  $C_5=0$ . При решении системы уравнений (6) были получены значения квадратов модулей коэффициентов  $|C_1|^2=0,001$ ;  $|C_2|^2=0,98$ ;  $|C_3|^2=0,05$ ;  $|C_4|^2=0,94$ ;  $C_5=0,03$ . Теоретическое значение нормированного ОУМ такого пучка равно  $J_z/W=3,00$ . Значение, полученное по формуле (9), равно 3,01.

Для пучка на рис. 4д–з значения коэффициентов в суперпозиции (1) равны  $C_1=0$ ;  $C_2=1$ ;  $C_3=0$ ;  $C_4=3^{1/2}$ ;  $C_5=0$ . Аналогично были рассчитаны радиусы  $r_m$  (рис. 5б) и при решении системы уравнений (6) были получены значения квадратов модулей коэффициентов  $|C_1|^2=-0,002$ ;  $|C_2|^2=1,03$ ;  $|C_3|^2=-0,09$ ;  $|C_4|^2=3,12$ ;  $|C_5|^2=-0,06$ . Теоретическое значение нормированного ОУМ такого пучка равно  $J_z/W=3,50$ . Значение, полученное по формуле (9), равно 3,51.

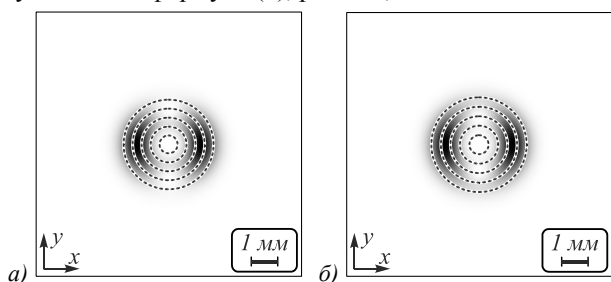


Рис. 5. Радиусы колец, по которым рассчитывалась интенсивность для решения системы уравнений (6) для пучка, показанного на рис. 4а, б (а) и на рис. 4д, е (б)

Существенно меньшая ошибка для суперпозиции двух мод ЛГ объясняется тем, что такие пучки состоят всего из двух угловых гармоник, в то время как пучки, формируемые СФП с дробным топологическим зарядом, состоят из бесконечного их числа. На рис. 6 приведены зависимости нормированной мощности отдельных угловых гармоник (ОУМ-спектр) от топологического заряда для Гауссова пучка, прошедшего через СФП (16) с топологическим зарядом  $\mu=3,5$ , и для суперпозиции мод ЛГ (26) порядка (0,2) и (0,4), также имеющей нормированный ОУМ, равный 3,5.

Из рис. 6 ясно видно, что один и тот же ОУМ могут иметь пучки с разным спектром угловых гармоник с целым топологическим зарядом. И чем меньше угловых гармоник содержит лазерный пучок, тем точнее определение его ОУМ с помощью предложенного метода (по измерению двух распределений интенсивности в фокусах двух цилиндрических линз). Метод позволяет с точностью 4% определить дробный ОУМ, меньший 30. Причём эта точность зависит от размера области, на которой рассчитывалась интенсивность. Например, на рис. 3 интенсивность рассчитывалась в кадре размером  $10 \times 10$  мм. Если эту область нужным образом увеличить, то ошибку определения ОУМ можно уменьшить. На практике нельзя поступить аналогичным образом, так как измерение малых значений интенсивности (меньше 0,01 от максимального значения) не будет приводить к увеличению точности определения ОУМ из-за уменьшения отношения сигнал/шум.

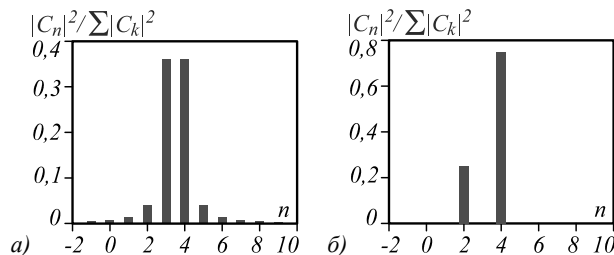


Рис. 6. Зависимости нормированной мощности угловых гармоник от топологического заряда для Гауссова пучка, прошедшего через СФП с топологическим зарядом  $\mu=3,5$  (а), и для суперпозиции мод ЛГ порядка (0,2) и (0,4), также имеющей нормированный ОУМ, равный 3,5 (б)

### 5. Эксперимент

Экспериментальное исследование было проведено с использованием схемы, показанной на рис. 1. Длина волны излучения лазера была равна 532 нм. Круглое отверстие РН диаметром 40 мкм в непрозрачном экране и линза L1 были использованы для расширения и коллимирования исходного Гауссова пучка. Коллимированный пучок света нормально падал на пропускающий модулятор света SLM (HOLOEYE LC 2012, число пикселей  $1024 \times 768$ , размер одного пикселя 36 мкм, размер активной рабочей области:  $36,9 \times 27,6$  мм). В качестве линз L1, L2 и L3 были использованы сферические линзы с фокусными расстояниями 350, 250 и 150 мм. Система, образованная линзами L2, L3 и пространственным фильтром F, позволяла выполнить пространственную фильтрацию сформированного модулятором светового поля и заблокировать нулевой дифракционный порядок, содержащий нерабочее излучение. Цилиндрические линзы CL1 и CL2, повернутые по отношению друг к другу на  $90^\circ$ , имели фокусное расстояние 500 мм. Заметим, что выбор длиннофокусных цилиндрических линз при моделировании и в эксперименте обусловлен требованием параксиальной фокусировки рассматриваемых световых полей. Плоскости данных линз совпадали с плоскостями, сопряжёнными с дисплеем модулятора света. Размер перетяжки Гауссова пучка в этих плоскостях был равен примерно 6,5 мм. Распределение интенсивности в фокусе цилиндрических линз CL1 и CL2 регистрировалось ПЗС-камерами CCD1 и CCD2 (число пикселей  $3264 \times 2448$ , размер одного пикселя  $1,67 \times 1,67$  мкм).

На рис. 7 показаны распределения интенсивности, полученные в фокусах линз CL1 и CL2 при различных значениях топологического заряда сформированных модулятором света оптических вихрей (3; 3,25; 3,5; 3,75 и 30,3). Измеренные в данных случаях по формуле (15) значения нормированного ОУМ равны 3,02; 3,10; 3,47; 3,96 и 27,78 соответственно. Данные результаты находятся в хорошем соответствии с результатами численного расчёта.

### Заключение

В работе предложены и исследованы численно и экспериментально два метода определения ОУМ параксиальных лазерных пучков. Один метод основан на

регистрации интенсивности в зоне Френеля, численном усреднении этой интенсивности по углу на дискретных радиусах и решении линейной системы уравнений для нахождения квадратов модулей коэффициентов разложения светового поля по базисным функциям. Другой метод основан на регистрации двух распределений ин-

тенсивности в Фурье-плоскости двух цилиндрических линз, повернутых друг относительно друга на 90°, и вычислении моментов первого порядка для измеренных интенсивностей. Экспериментальная ошибка определения небольших дробных ОУМ (до 4) – около 1%, а для больших дробных ОУМ (до 30) – около 8%.

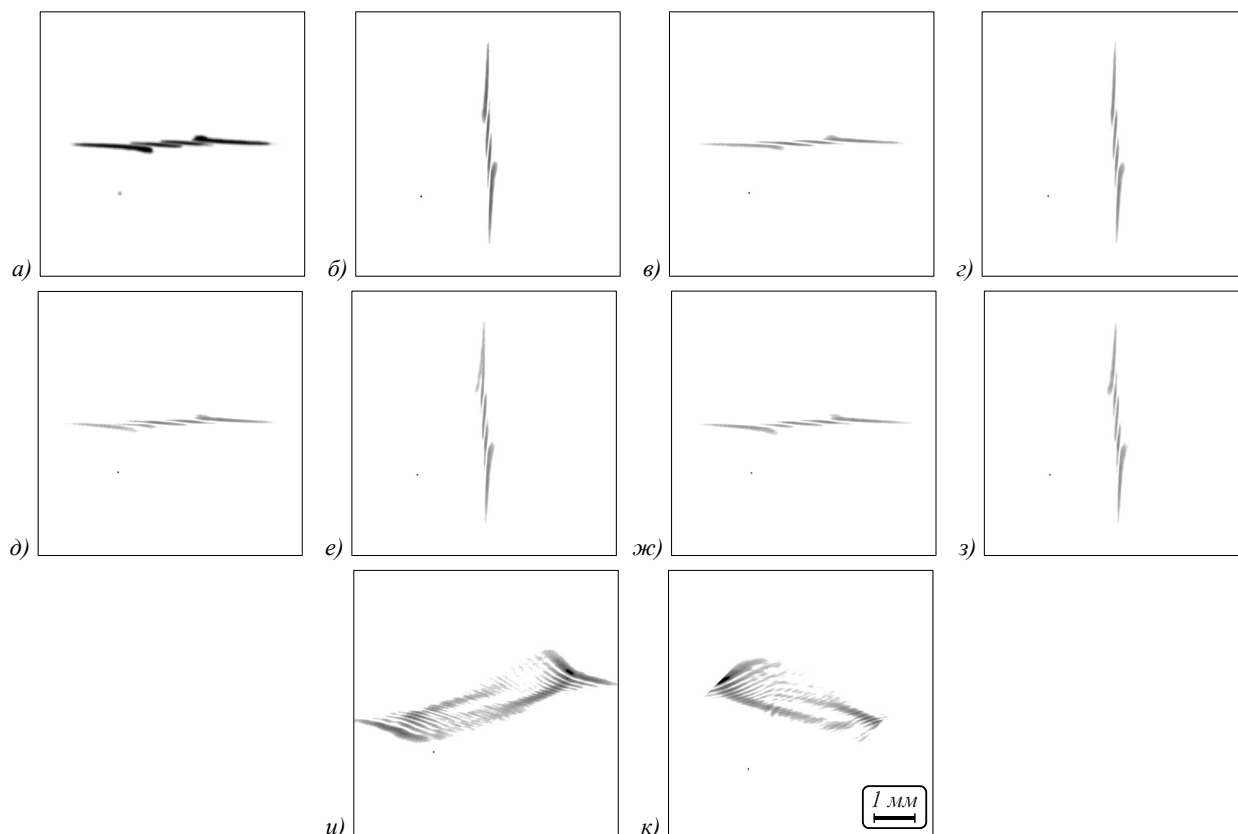


Рис. 7. Распределения интенсивности (негативное изображение) в фокусах цилиндрических линз CL1 и CL2, оси которых параллельны оси x (a, в, д, ж, и) и у (б, г, е, з, к) для Гауссова пучка, прошедшего через СФП с топологическим зарядом, равным 3,00 (а, б), 3,25 (в, г), 3,50 (д, е), 3,75 (ж, з) и 30,3 (и, к)

Для сравнения ниже, в табл. 1, собраны данные по численному и экспериментальному определению ОУМ с помощью двух цилиндрических линз. Для пучков, сформированных при прохождении Гауссова пучка через СФП с дробным топологическим зарядом

3,00; 3,25; 3,50; 3,75; 30,3, в табл. 1 приведены теоретические значения ОУМ, рассчитанные по формуле (19), а также значения, рассчитанные по формуле (15) по распределениям интенсивности, полученным численно и экспериментально.

Табл. 1. Теоретические значения ОУМ, рассчитанные по формуле (19), а также значения, рассчитанные по формуле (15) по распределениям интенсивности, полученным численно и экспериментально

n	3,00	3,25	3,50	3,75	30,3
ОУМ (19)	3,00	3,09	3,50	3,91	30,15
ОУМ, числ., (15)	2,98	3,06	3,45	3,87	28,87
Ошибка, числ., %	0,7	1,0	1,4	1,0	4,25
ОУМ, эксп., (15)	3,02	3,10	3,47	3,96	27,78
Ошибка, эксп.	0,7	0,3	0,9	1,3	7,9

**Благодарности**

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках Государственного задания ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение № 007-ГЗ/Ч3363/26) в части «Моделирование», Российского научного фонда (грант 17-19-01186) в частях «Определение ОУМ по измерению одного распределения интенсивности пучка» и «Определение ОУМ по измерению интен-

сивности в фокусе двух цилиндрических линз», а также Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 18-29-20003, 18-07-01129) в части «Параксиальные лазерные пучки с дробным ОУМ».

**Литература**

1. Wang, J. Advances in communications using optical vortices / J. Wang // Photonics Research. – 2016. – Vol. 4, Issue 5. – P. B14-B28. – DOI: 10.1364/PRJ.4.000B14.



2. **Wang, Z.** Orbital angular momentum beams generated by passive dielectric phase masks and their performance in a communication link / Z. Wang, Y. Yan, A. Arbabi, G. Xie, C. Liu, Z. Zhao, Y. Ren, L. Li, N. Ahmed, A.J. Willner, E. Arbabi, A. Faraon, R. Bock, S. Ashrafi, M. Tur, A.E. Willner // *Optics Letters*. – 2017. – Vol. 42, Issue 14. – P. 2746-2749. – DOI: 10.1364/OL.42.002746.
3. **Wang, X.** Recent advances on optical vortex generation / X. Wang, Z. Nie, Y. Liang, J. Wang, T. Li, B. Jia // *Nanophotonics*. – 2018. – Vol. 7, Issue 9. – P. 1533-1556. – DOI: 10.1515/nanoph-2018-0072.
4. **Gbur, G.J.** *Singular optics* // G.J. Gbur. – Boca Raton: CRC Press, 2016. – 545 p. – ISBN: 978-1-4665-8077-0.
5. **Kotlyar, V.V.** *Vortex laser beams* / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev. – Boca Raton: CRC Press, 2018. – 404 p. – ISBN: 978-1-1385-4211-2.
6. **Khonina, S.N.** Experimental selection of spatial Gauss-Laguerre modes / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, V.A. Soifer, P. Laakkonen, J. Turunen, Y. Wang // *Optical Memory & Neural Networks*. – 2000. – Vol. 9, Issue 1. – P. 73-82.
7. **Khonina, S.N.** An analysis of the angular momentum of a light field in terms of angular harmonics / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, P. Pääkkönen, J. Simonen, J. Turunen // *Journal of Modern Optics*. – 2001. – Vol. 48, Issue 10. – P. 1543-1557. – DOI: 10.1080/09500340108231783.
8. **Ruffato, G.** Test of mode-division multiplexing and demultiplexing in free-space with diffractive transformation optics / G. Ruffato, M. Massari, G. Parisi, F. Romanato // *Optics Express*. – 2017. – Vol. 25, Issue 7. – P. 7859-7868. – DOI: 10.1364/OE.25.007859.
9. **Li, Y.** Orbital angular momentum multiplexing and demultiplexing by a single metasurface / Y. Li, X. Li, L. Chen, M. Pu, J. Jin, M. Hong, X. Luo // *Advanced Optical Materials*. – 2016. – Vol. 5, Issue 2. – P. 1600502. – DOI: 10.1002/adom.201600502.
10. **Bekshaev, A.Ya.** Optical vortex symmetry breakdown and decomposition of the orbital angular momentum of light beams / A.Ya. Bekshaev, M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2003. – Vol. 20, Issue 8. – P. 1635-1643. – DOI: 10.1364/JOSAA.20.001635.
11. **Denisenko, V.** Determination of topological charges of polychromatic optical vortices / V. Denisenko, V. Shvedov, A.S. Desyatnikov, D.N. Neshesv, W. Krolikowski, A. Volyar, M. Soskin, Y.S. Kivshar // *Optics Express*. – 2009. – Vol. 17, Issue 26. – P. 23374-23379. – DOI: 10.1364/OE.17.023374.
12. **Kotlyar, V.V.** Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Applied Optics*. – 2017. – Vol. 56, Issue 14. – P. 4095-4110. – DOI: 10.1364/AO.56.004095.
13. **Alperin, S.N.** Quantitative measurement of the orbital angular momentum of light with a single, stationary lens / S.N. Alperin, R.D. Niederriter, J.T. Gopinath, M.E. Siemens // *Optics Letters*. – 2016. – Vol. 41, Issue 21. – P. 5019-5022. – DOI: 10.1364/OL.41.005019.
14. **Alperin, S.N.** Angular momentum of topologically structured darkness / S.N. Alperin, M.E. Siemens // *Physical Review Letters*. – 2017. – Vol. 119, Issue 20. – P. 203902. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.203902.
15. **Liu, Z.** Measuring high-order optical orbital angular momentum with a hyperbolic gradually changing period pure-phase grating / Z. Liu, S. Gao, W. Xiao, J. Yang, X. Huang, Y. Feng, J. Li, W. Liu, Z. Li // *Optics Letters*. – 2018. – Vol. 43, Issue 13. – P. 3076-3079. – DOI: 10.1364/OL.43.003076.
16. **Maji, S.** Controlled noncanonical vortices from higher-order fractional screw dislocations / S. Maji, M.M. Brundavanam // *Optics Letters*. – 2017. – Vol. 42, Issue 12. – P. 2322-2325. – DOI: 10.1364/OL.42.002322.
17. **D'Errico, A.** Measuring the complex orbital angular momentum spectrum and spatial mode decomposition of spectrum light beams / A. D'Errico, R. D'Amelio, B. Piccirillo, F. Cardano, L. Marrucci // *Optica*. – 2017. – Vol. 4, Issue 11. – P. 1350-1357. – DOI: 10.1364/OPTICA.4.001350.
18. **Kotlyar, V.V.** Astigmatic laser beams with a large orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Optics Express*. – 2018. – Vol. 26, Issue 1. – P. 141-156. – DOI: 10.1364/OE.26.000141.
19. **Melo, L.A.** Direct measurement of the topological charge in elliptical beams using diffraction by a triangular aperture / L.A. Melo, A.J. Jesus-Silva, S. Chavez-Cedra, P.H.S. Ribeiro, W.C. Soares // *Scientific Reports*. – 2018. – Vol. 8. – P. 6370. – DOI: 10.1038/s41598-018-24928-5.
20. **Gao, H.** Topological charge measurement of concentric OAM states using the phase-shift method / H. Gao, Y. Han, Y. Li, D. Zhu, M. Sun, S. Yu // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2018. – Vol. 35, Issue 1. – P. A40-A44. – DOI: 10.1364/JOSAA.35.000A40.
21. **Волярь, А.В.** По ту сторону интенсивности или моменты интенсивности и измерение спектра оптических вихрей сложных пучков / А.В. Волярь, М.В. Брещко, Я.Е. Акимова, Ю.А. Егоров // *Компьютерная оптика*. – 2018. – Т. 42, № 5. – P. 736-743. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-42-5-736-743.
22. **Siegman, A.E.** *Lasers* / A.E. Siegman. – Mill Valley, CA: University Science Books, 1986. – 1283 p. – ISBN: 978-0-935702-11-8.
23. **Xie, Z.** Integrated (de)multiplexer for orbital angular momentum fiber communication / Z. Xie, S. Gao, T. Lei, S. Feng, Y. Zhang, F. Li, J. Zhang, Z. Li, X. Yuan // *Photonics Research*. – 2018. – Vol. 6, Issue 7. – P. 743-749. – DOI: 10.1364/PRJ.6.000743.
24. **Gori, F.** Bessel-Gauss beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // *Optics Communications*. – 1987. – Vol. 64, Issue 6. – P. 491-495. – DOI: 10.1016/0030-4018(87)90276-8.
25. **Berry, M.V.** Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. – 2004. – Vol. 6, Issue 2. – P. 259-268. – DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/018.
26. **Götte, J.B.** Quantum formulation of fractional orbital angular momentum / J.B. Götte, S. Franke-Arnold, R. Zambrini, S.M. Barnett // *Journal of Modern Optics*. – 2007. – Vol. 54, Issue 12. – P. 1723-1738. – DOI: 10.1080/09500340601156827.
27. **Kotlyar, V.V.** Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Optics Letters*. – 2014. – Vol. 39, Issue 8. – P. 2395-2398. – DOI: 10.1364/OL.39.002395.
28. **Прудников, А.П.** Интегралы и ряды. Том 2. Специальные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев – М.: Наука, 1983. – 752 с.

## Приложение А

Если учесть, что цилиндрические линзы выполняют преобразование Фурье по одной координате, а по второй декартовой координате свободное пространство выполняет преобразование Френеля, то вместо (13), (14) получим:

$$E(x, y) = \frac{ik}{2\pi f} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_x(\xi, \eta) \times \exp\left\{-\frac{ik}{2f}[\xi^2 + (\eta - y)^2] + i\frac{k}{f}x\xi\right\} d\xi d\eta, \quad (A1)$$

$$E(x, y) = \frac{ik}{2\pi f} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_y(\xi, \eta) \times \exp\left\{-\frac{ik}{2f}[(\xi - x)^2 + \eta^2] + i\frac{k}{f}y\eta\right\} d\xi d\eta. \quad (A2)$$

Тогда ОУМ будет иметь вид:

$$J_z = -i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E^*(x, y) \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) E(x, y) dx dy = \frac{k^2}{2\pi f^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \hat{E}_y^*(\xi', \eta) \hat{E}_y(\xi'', \eta) d\xi' d\xi'' d\eta \times \\ \times \exp\left\{\frac{ik}{2f}(\xi'^2 - \xi''^2) - i\frac{k}{f}x(\xi' - \xi'')\right\} x dx - \frac{k^2}{2\pi f^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \hat{E}_x^*(\xi, \eta') \hat{E}_x(\xi, \eta'') d\xi d\eta' d\eta'' \times \\ \times \exp\left\{\frac{ik}{2f}(\eta'^2 - \eta''^2) - \frac{ik}{f}y(\eta' - \eta'')\right\} y dy. \quad (A3)$$

Интегралы в (A3) можно вычислить, тогда получим:

$$J_z = -i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \hat{E}_y(\xi, \eta) \times \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{E}_y^*(\xi, \eta) + \frac{ik\xi}{f} \hat{E}_y^*(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta + i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \hat{E}_x(\xi, \eta) \times \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \hat{E}_x^*(\xi, \eta) + \frac{ik\eta}{f} \hat{E}_x^*(\xi, \eta) \right] d\xi d\eta. \quad (A4)$$

Или в другой форме:

$$J_z = \frac{k}{f} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \eta |\hat{E}_y(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta - \frac{k}{f} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \eta |\hat{E}_x(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta - \\ - i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta \hat{E}_y(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{E}_y^*(\xi, \eta) d\xi d\eta + i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \xi \hat{E}_x(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \hat{E}_x^*(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (A5)$$

Выражение (A5) для ОУМ отличается от (15) третьим и четвертым слагаемыми, которые нельзя получить из эксперимента. Но, как показывает моделирование и эксперимент, для случая парааксиального распространения пучка эти два слагаемых вносят в момент незначительный вклад (всего несколько процентов).

### Сведения об авторах

**Котляр Виктор Викторович**, 1957 года рождения, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН и по совместительству профессор кафедры технической кибернетики Самарского университета. В 1979 году окончил физический факультет Куйбышевского государственного университета, в 1988 году защитил кандидатскую диссертацию в Саратовском государственном университете, а в 1992 году – докторскую диссертацию в Центральном конструкторском бюро Уникального приборостроения РАН (г. Москва). Область научных интересов: нанофотоника, дифракционная компьютерная оптика. Публикации: 300 научных трудов, 5 монографий, 7 авторских свидетельств.

**Ковалёв Алексей Андреевич**, 1979 года рождения, в 2002 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика». Доктор физико-математических наук (2012 год), работает старшим научным сотрудником лаборатории лазерных измерений ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. В списке научных работ более 150 статей. Область научных интересов: математическая теория дифракции, фотонно-кристаллические устройства. E-mail: [alanko@smr.ru](mailto:alanko@smr.ru).

**Порфирьев Алексей Петрович**, 1987 года рождения, в 2010 году окончил Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (ныне Самарский университет) по специальности «Прикладная математика и физика». Кандидат физико-математических наук (2013 год). Доцент кафедры технической кибернетики Самарского университета, научный сотрудник лаборатории микро- и нанотехнологий ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН. Область научных интересов: дифракционная оптика, оптическое манипулирование, структурированные лазерные пучки. E-mail: [porfirev.alexey@smr.ru](mailto:porfirev.alexey@smr.ru).

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 12 ноября 2018 г. Окончательный вариант – 18 декабря 2018 г.

## Methods for determining the orbital angular momentum of a laser beam

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>, A.P. Porfirev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> IPSI RAS - Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS,  
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151

<sup>2</sup> Samara National Research University, 443086, Russia, Samara, Moskovskoye Shosse 34

### Abstract

We propose and study numerically and experimentally two methods for determining the orbital angular momentum (OAM) of paraxial laser beams. One method is based on registering the intensity in the Fresnel zone, numerically averaging this intensity over the polar angle at discrete radii, and solving a system of linear equations to find squared modules of the coefficients of the light field expansion in terms of basis functions. The other method is based on registering two intensity distributions in the Fourier plane of two cylindrical lenses rotated 90 degrees relative to each other, and calculating the first-order moments of the measured intensities. The experimental error of the OAM determination is about 1% for small fractional OAM (up to 4), and about 8% for large fractional OAM (up to 30).

**Keywords:** paraxial laser beam, fractional orbital angular momentum, fractional topological charge, optical vortex, cylindrical lens, superposition of spatial modes.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Methods for determining the orbital angular momentum of a laser beam. *Computer Optics* 2019; 43(1): 42-53. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-1-42-53.

**Acknowledgements:** This work was partly funded by the RF Ministry of Science and Higher Education within the state project of FSRC "Crystallography and Photonics" RAS under agreement 007-Г3/Ч3363/26 ("Simulation"), the Russian Science Foundation under Project # 17-19-01186 ("Determining the OAM by measuring a single distribution of the beam intensity" and "Determining the OAM by measuring the intensity in the focus of two cylindrical lenses", and the Russian Foundation for Basic Research under projects ## 18-29-20003, 18-07-01129 ("Paraxial laser beams carrying fractional OAM").

### References

- [1] Wang J. Advances in communications using optical vortices. *Phot Res* 2016; 4(5): B14-B28. DOI: 10.1364/PRJ.4.000B14.
- [2] Wang Z, Yan Y, Arbabi A, Xie G, Liu C, Zhao Z, Ren Y, Li L, Ahmed N, Willner AJ, Arbabi E, Faraon A, Bock R, Ashrafi S, Tur M, Willner AE. Orbital angular momentum beams generated by passive dielectric phase masks and their performance in a communication link. *Opt Lett* 2017; 42(14): 2746-2749. DOI: 10.1364/OL.42.002746.
- [3] Wang X, Nie Z, Liang Y, Wang J, Li T, Jia B. Recent advances on optical vortex generation. *Nanophotonics* 2018; 7(9): 1533-1556. DOI: 10.1515/nanoph-2018-0072.
- [4] Gbur GJ. *Singular optics*. Boca Raton: CRC Press; 2016. ISBN: 978-1-4665-8077-0.
- [5] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. *Vortex laser beams*. Boca Raton: CRC Press; 2018. ISBN: 978-1-1385-4211-2.
- [6] Khonina SN, Kotlyar VV, Skidanov RV, Soifer VA, Laakkonen P, Turunen J, Wang Y. Experimental selection of spatial Gauss-Laguerre modes. *Optical Memory & Neural Networks* 2000; 9(1): 73-82.
- [7] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Pääkkönen P, Simonen J, Turunen J. An analysis of the angular momentum of a light field in terms of angular harmonics. *J Mod Opt* 2001; 48(10): 1543-1557. DOI: 10.1080/09500340108231783.
- [8] Ruffato G, Massari M, Parisi G, Romanato F. Test of mode-division multiplexing and demultiplexing in free-space with diffractive transformation optics. *Opt Express* 2017; 25(7): 7859-7868. DOI: 10.1364/OE.25.007859.
- [9] Li Y, Li X, Chen L, Pu M, Jin J, Hong M, Luo X. Orbital angular momentum multiplexing and demultiplexing by a single metasurface. *Adv Opt Mater* 2016; 5(2): 1600502. DOI: 10.1002/adom.201600502.
- [10] Bekshaev AY, Soskin MS, Vasnetsov MV. Optical vortex symmetry breakdown and decomposition of the orbital angular momentum of light beams. *J Opt Soc Am A* 2003; 20(8): 1635-1643. DOI: 10.1364/JOSAA.20.001635.
- [11] Denisenko V, Shvedov V, Desyatnikov AS, Neshesv DN, Krolikowski W, Volyar A, Soskin MS, Kivshar YS. Determination of topological charges of polychromatic optical vortices. *Opt Express* 2009; 17(26): 23374-23379. DOI: 10.1364/OE.17.023374.
- [12] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge. *Appl Opt* 2017; 56(14): 4095-4110. DOI: 10.1364/AO.56.004095.
- [13] Alperin SN, Niederriter RD, Gopinath JT, Siemens ME. Quantitative measurement of the orbital angular momentum of light with a single, stationary lens. *Opt Lett* 2016; 41(21): 5019-5022. DOI: 10.1364/OL.41.005019.
- [14] Alperin SN, Siemens ME. Angular momentum of topologically structured darkness. *Phys Rev Lett* 2017; 119(20): 203902. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.203902.
- [15] Liu Z, Gao S, Xiao W, Yang J, Huang X, Feng Y, Li J, Liu W, Li Z. Measuring high-order optical orbital angular momentum with a hyperbolic gradually changing period pure-phase grating. *Opt Lett* 2018; 43(13): 3076-3079. DOI: 10.1364/OL.43.003076.
- [16] Maji S, Brundavanam MM. Controlled noncanonical vortices from higher-order fractional screw dislocations. *Opt Lett* 2017; 42(12): 2322-2325. DOI: 10.1364/OL.42.002322.
- [17] D'Errico A, D'Amelio R, Piccirillo B, Cardano F, Marrucci L. Measuring the complex orbital angular momentum spectrum and spatial mode decomposition of spectrum light

- beams. *Optica* 2017; 4(11): 1350-1357. DOI: 10.1364/OPTICA.4.001350.
- [18] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic laser beams with a large orbital angular momentum. *Opt Express* 2018; 26(1): 141-156. DOI: 10.1364/OE.26.000141.
- [19] Melo LA, Jesus-Silva AJ, Chavez-Cedra S, Ribeiro PHS, Soares WC. Direct measurement of the topological charge in elliptical beams using diffraction by a triangular aperture. *Sci Rep* 2018; 8: 6370. DOI: 10.1038/s41598-018-24928-5.
- [20] Gao H, Han Y, Li Y, Zhu D, Sun M, Yu S. Topological charge measurement of concentric OAM states using the phase-shift method. *J Opt Soc Am A* 2018; 35(1): A40-A44. DOI: 10.1364/JOSAA.35.000A40.
- [21] Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Beyond the light intensity or intensity moments and measurements of the vortex spectrum in complex light beams [In Russian]. *Computer Optics* 2018; 42(5): 736-743. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-42-5-736-743.
- [22] Siegman AE. *Lasers*. Mill Valley, CA: University Science Books; 1986. ISBN: 978-0-935702-11-8.
- [23] Xie Z, Gao S, Lei T, Feng S, Zhang Y, Li F, Zhang J, Li Z, Yuan X. Integrated (de)multiplexer for orbital angular momentum fiber communication. *Phot Res* 2018; 6(7): 743-749. DOI: 10.1364/PRJ.6.000743.
- [24] Gori F, Guattari G, Padovani C. Bessel-Gauss beams. *Opt Commun* 1987; 64(6): 491-495. DOI: 10.1016/0030-4018(87)90276-8.
- [25] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2004; 6(2): 259-268. DOI: 10.1088/1464-4258/6/2/018.
- [26] Gotte JB, Franke-Arnold S, Zambrini R, Barnett SM. Quantum formulation of fractional orbital angular momentum. *J Mod Opt* 2007; 54(12): 1723-1738. DOI: 10.1080/09500340601156827.
- [27] Kotlyar VV, Kovalev AA, Soifer VA. Asymmetric Bessel modes. *Opt Lett* 2014; 39(8): 2395-2398. DOI: 10.1364/OL.39.002395.
- [28] Prudnikov AP, Brychkov YA, Marichev OI. *Integrals and series. Volume 2: Special functions*. New York: Gordon and Breach; 1986. ISBN: 2-88124-097-6.

#### Authors' information

**Victor Victorovich Kotlyar** is the head of a laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and a professor of Computer Science department at Samara National Research University. He graduated from Kuibyshev State University (1979), received his Candidate's and Doctor's Degrees in Physics & Mathematics from Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation of the RAS (1992). He is a co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current research interests include diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices.

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 150 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices.

**Alexey Petrovich Porfirev** (b. 1987) graduated (2010) from Samara National Research University, majoring in Applied Physics and Mathematics. He holds the Candidate's Degree in Physics and Mathematics (2013). Currently he is an associate professor at Technical Cybernetics department of Samara National Research University and a researcher at Micro- and Nanotechnologies laboratory of the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. His current research interests include diffractive optics, optical manipulation and structured laser beams.

*Received November 12, 2018. The final version – December 18, 2018.*