

## Обратный поток энергии у непараксиального оптического вихря в ближней зоне

В.В. Котляр<sup>1,2</sup>, А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,  
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

В работе на основе разложения по плоским волнам получены все шесть проекций векторов напряжённости электрического и магнитного поля для оптического вихря с произвольным целым топологическим зарядом с эллиптической поляризацией. Получены также выражения для распределения интенсивности и проекций вектора Пойнтинга в начальной плоскости этого оптического вихря. В частном случае узкого углового спектра плоских волн (пучок Бесселя) и круговой поляризации показано, что при наличии в начальном световом поле неоднородных затухающих волн вблизи оптической оси может возникать обратный поток световой энергии. Также показано, что в начальной плоскости имеет место эффект «углового трактора», когда на разных радиусах относительно оптической оси поперечный поток энергии вращается по часовой и против часовой стрелки. С помощью полученных общих выражений можно анализировать особенности светового потока и для других известных точных решений уравнения Максвелла.

**Ключевые слова:** оптический вихрь, угловой спектр плоских волн, затухающие волны, вектор Пойнтинга, обратный поток мощности, оптический трактор.

**Цитирование:** Котляр, В.В. Обратный поток энергии у непараксиального оптического вихря в ближней зоне / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв // Компьютерная оптика. – 2019. – Т. 43, № 1. – С. 54–62. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-1-54-62.

### Введение

В оптике активно изучаются оптические «тракторные» пучки (*optical tractor beams*) [1–4]. Это пучки, которые позволяют «притягивать» микрообъекты (например, клетки бактерий [1]) к источнику света. Например, в [4] «тракторный» пучок формируется с помощью металлинзы-аксикона в плёнке кремния. Параллельно исследуется другой интересный эффект в оптике – обратное распространение (*reverse propagation*) [5] или обратный поток энергии (*negative energy flux* [6] или *energy backflow* [7]). Этот эффект возникает, когда продольная составляющая вектора Пойнтинга направлена в обратную сторону по отношению к направлению распространения пучка света. Известен также эффект углового трактора [8], когда в вихревом пучке на разных радиусах от оптической оси поток энергии вращается в разные стороны.

Обратный поток энергии описан в разных статьях, в которых не занимались им напрямую, а он получался как «побочный эффект». В [9] численно показано наличие обратного потока при прохождении через нанополоску золота на поверхности InP, хотя сами авторы на это не обратили внимания, а констатировали только, что свет не проходит в среду InP при нормальном падении в присутствии золотой нанополоски. В [10] численно было показано наличие обратного потока при фокусировке света в градиентной микролинзе на выходной торец. Обратный поток объяснялся наличием бегущей по торцу микролинзы поверхностной волны, которая то входит, то выходит из среды. В [11] получено уравнение (19) для продольной компоненты вектора Пойнтинга в фокусе пучка Бесселя нулевого порядка с линейной поляризацией,

из которого следует, что поток энергии на некоторых радиусах от оптической оси меняет знак (распространяется в обратном направлении). Правда, в [11] этого не заметили. Ранее, в [12] была получена аналогичная формула (15) для продольной составляющей вектора Пойнтинга пучка Бесселя нулевого порядка. В [12] заметили, что на определённых радиусах поток энергии может быть направлен в обратном направлении по отношению к направлению распространения пучка. В [13] численно показано возникновение обратного потока энергии при прохождении через субволновое отверстие. Обратный поток возникал вокруг сингулярностей, которые появлялись вблизи отверстия. Ранее, ещё в 1950 году, был теоретически обнаружен обратный поток энергии вокруг изолированных нулей интенсивности при решении задачи дифракции плоской волны на металлической полуплоскости [14].

Обратный поток энергии целенаправленно искали в разных векторных пучках света с разным состоянием поляризации. В [15] теоретически показали наличие обратного распространения энергии в линейной суперпозиции ТЕ- и ТМ-поляризованных пучков Бесселя произвольного порядка. В [6] обнаружили отрицательный поток энергии в Х-волнах. Х-волны – это полностью векторные пучки, полученные с помощью потенциала Герца из скалярного точного решения скалярного волнового уравнения, и их амплитуда пропорциональна гипергеометрической функции Гаусса  ${}_2F_1(a, b, c; x)$ . В [16] численно показано, что обратный поток энергии имеет место в векторных пучках Бесселя с дробным топологическим зарядом. В этом случае амплитуда всех составляющих векторов электрического и магнитного полей выражается через

бесконечные суммы функций Бесселя. В [17] эффект негативного распространения пучка найден в непараксиальных пучках Эйри.

Обратный поток энергии был обнаружен (правда, только теоретически) при острой фокусировке лазерных пучков. Это особенно интересно, так как в области фокуса обратный поток оказывается сравнимым по величине с прямым потоком энергии. В [18] получено простое выражение для продольной компоненты вектора Пойнтинга в фокусе апланатической системы при фокусировке плоской волны с линейной поляризацией (уравнение (3.21)), из которого следует, что на некоторых радиусах (вблизи тёмных колец) имеет место обратный поток энергии. Этот эффект в фокусе идеальной линзы ранее был замечен в [19]. В [20] численно показано, что при фокусировке параксиального Гауссова пучка с помощью сферической линзы, ограниченной апертурой, в плоскости фокуса и рядом с ней на некоторых радиусах возникают тёмные кольца Эйри, в которых имеет место фазовая сингулярность.

Позже Берри с помощью асимптотик показал, что такие сингулярности возникают в фокусе непараксиального Гауссова пучка и без ограничения линзы апертурой [21]. В [21] также показано, что вокруг сингулярности фазы возникает круговой поток энергии, в том числе и обратный поток. В [22] Воляр численно показал, что в фокусе линейно поляризованных векторных непараксиальных пучков Гаусса (сферические моды низших порядков) сечение пучка эллиптическое, и вокруг центрального пятна имеются «острова сингулярности» (вместо колец Эйри), рядом с которыми возникает обратный поток энергии. В [23] аналогичные «острова сингулярности» и обратный поток рядом с ними численно обнаружен в плоскости фокуса векторных непараксиальных Гауссовых вихревых пучков с круговой поляризацией. В [24] численно было показано, что с помощью одной спиральной металинзы с высокой числовой апертурой можно менять место и величину обратного потока в плоскости фокуса с помощью изменения состояния поляризации падающего излучения (ТЕ- или ТМ-поляризация, левая или правая круговые поляризации). В этих работах [18–23] обратный поток энергии был обнаружен в периферийных кольцах картины дифракции в фокальной плоскости. И только в [25] численно показано, что при непараксиальной фокусировке пучка Лагерра–Гаусса с топологическим зарядом 2 и обратной (левой) круговой поляризацией в плоскости фокуса на оптической оси (в центре фокусного пятна) имеет место обратный поток энергии.

Из приведённого краткого обзора работ по обратному потоку следует, что этот эффект имеет универсальную природу: он возникает в фокусе плоской волны [18, 19], в фокусе ограниченного параксиального [20] и неограниченного непараксиального [21] скалярных Гауссовых пучков, а также в фокусе непараксиальных пучков Лагерра–Гаусса [24]. Он возникает также в фокусе непараксиальных векторных пучков с

линейной [23] и круговой поляризациями, в различных векторных модовых пучках (Бесселя [15, 16], Эйри [17], Х-волны [6]), при фокусировке на границу раздела сред [10], вблизи наноструктурированных поверхностей [9, 13]. Заметим, что у параксиальных световых полей (при отсутствии ограничивающей диафрагмы) продольная компонента вектора Пойнтинга, пропорциональна интенсивности и не меняет знака [8]. То есть у параксиальных полей не может быть обратного потока энергии в свободном пространстве.

Рассматриваемый эффект обратного потока энергии может быть использован для демонстрации эффекта «оптического трактора» [26, 27], когда микрочастица, захваченная в специальном образцом сфокусированный лазерный пучок, двигается против направления распространения света в пучке.

В данной работе, в отличие от работы [18], в которой используется формализм Ричардса–Вольфа, работ [6, 15, 16, 17, 22, 23], в которых используются известные точные решения уравнений Максвелла (Х-волны, пучки Бесселя, Эйри, квази-Гаусса [5], векторные непараксиальные гауссовы пучки), получены общие выражения для проекций вектора Пойнтинга для любого вихревого электромагнитного поля с эллиптической поляризацией методом разложения по плоским волнам. Получено условие, при котором в начальной плоскости пучка (в перетяжке) возникает обратный поток энергии. Из этого условия следует, что только при наличии неоднородных затухающих волн с большими поперечными проекциями волнового вектора в перетяжке может возникнуть обратный поток энергии. Причём чем больше вклад затухающих волн в общую амплитуду пучка, тем больше величина обратного потока энергии, который при этом сравним по величине с прямым потоком.

### 1. Интенсивность и продольная проекция вектора Пойнтинга

Общее решение уравнения Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2)P(x, y, z) = 0, \quad (1)$$

где  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ , можно записать в виде разложения по спектру плоских волн [28]

$$P(x, y, z) = (2\pi k)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi, \eta) \times \\ \times \exp\left[ik\left(x\xi + y\eta + z\sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}\right)\right] d\xi d\eta, \quad (2)$$

где  $A(\xi, \eta)$  – амплитуда спектра плоских волн,  $k$  – волновое число света. Для оптического вихря с топологическим зарядом  $n$  амплитуду спектра плоских волн можно записать в полярных координатах  $(\rho, \theta)$  в виде

$$A(\xi, \eta) = A(\rho, \theta) = A_n(\rho) e^{in\theta}. \quad (3)$$

С учётом (3), скалярную функцию (2) в цилиндрических координатах  $(r, \varphi)$  запишем в виде:

$$P(r, \varphi, z) = i^n k^{-1} e^{in\varphi} I_{1,n}, \quad (4)$$

где

$$I_{1,n} = \int_0^\infty A_n(\rho) e^{ikz\sqrt{1-\rho^2}} J_n(kr\rho) \rho d\rho, \quad (5)$$

а  $J_n(x)$  – функция Бесселя первого рода  $n$ -го порядка. С помощью решения уравнения Гельмгольца (1) можно рассчитать все проекции векторов напряжённости электрического и магнитного поля, в совокупности удовлетворяющих уравнениям Максвелла. Для этого воспользуемся методикой, например, описанной в [29]. Будем формировать световое поле с эллиптической поляризацией, тогда поперечные проекции вектора напряжённости электрического поля можно записать в виде

$$E_x(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad E_y(x, y, z) = i\sigma \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (6)$$

где  $\sigma = \pm 1$  – спиновый индекс, определяющий левую и правую круговую поляризацию ( $\sigma = +1$  для правой поляризации и  $\sigma = -1$  для левой поляризации). При других значениях  $\sigma$  выражение (6) описывает поле с эллиптической поляризацией. Подставляя (4) в (6), получим для поперечных проекций электрического поля:

$$\begin{aligned} E_x(r, \varphi, z) &= i^{n+1} e^{in\varphi} I_{3,n}, \\ E_y(r, \varphi, z) &= -i^n \sigma e^{in\varphi} I_{3,n}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$I_{3,n} = \int_0^\infty \sqrt{1-\rho^2} A_n(\rho) e^{ikz\sqrt{1-\rho^2}} J_n(kr\rho) \rho d\rho. \quad (8)$$

Продольную проекцию найдём с помощью соотношения [29]:

$$E_z(x, y, z) = -\frac{\partial P}{\partial x} - i\sigma \frac{\partial P}{\partial y} \quad (9)$$

и получим

$$E_z(r, \varphi, z) = i^n \left[ \gamma_+ e^{i(n+1)\varphi} I_{2,n+1} - \gamma_- e^{i(n-1)\varphi} I_{2,n-1} \right], \quad (10)$$

где

$$I_{2,n} = \int_0^\infty A_n(\rho) e^{ikz\sqrt{1-\rho^2}} J_n(kr\rho) \rho^2 d\rho,$$

а  $\gamma_\pm = (1 \pm \sigma)/2$ . Из (7) и (10) можно записать уравнение для распределения интенсивности на любой плоскости, перпендикулярной оптической оси  $z \geq 0$ , для произвольного оптического вихря (3) с эллиптической поляризацией:

$$\begin{aligned} I &= |\gamma_+|^2 |I_{2,n+1}|^2 + |\gamma_-|^2 |I_{2,n-1}|^2 + \\ &+ \left(1 + |\sigma|^2\right) |I_{3,n}|^2 - 2 \operatorname{Re} \left\{ \gamma_+^* \gamma_- I_{2,n-1}^* I_{2,n+1} e^{2i\varphi} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) видно, что для оптического вихря с круговой поляризацией (то есть либо  $\gamma_- = 0$ , либо  $\gamma_+ = 0$ ) распределение интенсивности осесимметричное, так как не зависит от полярного угла  $\varphi$ . Из (11) следует, что распределения интенсивности для вихревых пучков с левой и правой круговыми поляризациями разные:

$$\begin{aligned} I_+ &= 2 |I_{3,n}|^2 + |I_{2,n+1}|^2, \\ I_- &= 2 |I_{3,n}|^2 + |I_{2,n-1}|^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Из второго уравнения (12) для левой круговой поляризации при  $n=1$  следует, что интенсивность на оптической оси отлична от нуля

$$I_-(r=0, z) = |I_{2,0}|^2 = \left| \int_0^\infty A_1(\rho) e^{ikz\sqrt{1-\rho^2}} \rho^2 d\rho \right|^2 > 0, \quad (13)$$

но так как вклад в интенсивность (13) на оптической оси даёт только продольная компонента электрического поля (10), то свет вдоль оси распространяться не будет, то есть не будет потока энергии вдоль оптической оси. При  $n > 1$  на оптической оси интенсивность (11) всегда будет равна нулю. Поперечные составляющие вектора напряжённости магнитного поля можно найти из уравнения Максвелла для монохроматического поля:

$$\mathbf{H} = -\frac{i}{k} \operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (14)$$

Получим:

$$\begin{aligned} H_x(r, \varphi, z) &= \frac{1}{2} i^n \left[ \gamma_+ e^{i(n+2)\varphi} \bar{I}_{2,n+2} - \right. \\ &\left. - \gamma_- e^{i(n-2)\varphi} \bar{I}_{2,n-2} + \sigma e^{in\varphi} (2I_{1,n} - \bar{I}_{2,n}) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} H_y(r, \varphi, z) &= \frac{-1}{2} i^{n+1} \left[ \gamma_+ e^{i(n+2)\varphi} \bar{I}_{2,n+2} + \right. \\ &\left. + \gamma_- e^{i(n-2)\varphi} \bar{I}_{2,n-2} - e^{in\varphi} (2I_{1,n} - \bar{I}_{2,n}) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$\bar{I}_{2,n} = \int_0^\infty \rho^2 A_n(\rho) e^{ikz\sqrt{1-\rho^2}} J_n(kr\rho) \rho d\rho. \quad (17)$$

С помощью поперечных проекций электрического (7) и магнитного (15), (16) векторов световой волны можно получить выражение для продольной проекции вектора Умова–Пойнтинга (потока энергии), согласно формуле [16]  $\mathbf{S} = c \operatorname{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]/(8\pi)$ :

$$S_z = (c/8\pi) \operatorname{Re} (E_x H_y^* - E_y H_x^*), \quad (18)$$

где  $\operatorname{Re}$  – вещественная часть числа. Подставляя в (18) выражения (7), (15), и (16), получим (с точностью до  $c/(8\pi)$ ):

$$\begin{aligned} S_z &= \operatorname{Re} \left\{ I_{3,n}^* \left[ (1 + |\sigma|^2) (I_{1,n} - \bar{I}_{2,n}/2) - \right. \right. \\ &\left. \left. - \gamma_+^* \gamma_- e^{2i\varphi} \bar{I}_{2,n+2} - \gamma_+^* \gamma_- e^{-2i\varphi} \bar{I}_{2,n-2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

и для случая круговой поляризации ( $\sigma = \pm 1$ ):

$$S_z = \operatorname{Re} \left\{ I_{3,n}^* (2I_{1,n} - \bar{I}_{2,n}) \right\}. \quad (20)$$

## 2. Обратный поток энергии в начальной плоскости

Из (20) следует, что продольный поток энергии радиально-симметричный и одинаковый для левой и

правой круговых поляризации, в отличие от распределения интенсивности.

Пусть для простоты амплитуда плоских волн описывается действительной функцией  $A_n(\rho)$ , тогда, подставляя в (20) из (5), (8) и (17), вместо (20) при  $z=0$  получим:

$$S_z = \left[ \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} A_n(\rho) J_n(kr\rho) \rho d\rho \right] \times \left[ \int_0^\infty (2-\rho^2) A_n(\rho) J_n(kr\rho) \rho d\rho \right]. \tag{21}$$

Анализ выражения (21) можно проводить только численно, выбирая подходящие функции в качестве амплитуды спектра плоских волн  $A_n(\rho)$ . Чтобы получить конкретный аналитический результат, рассмотрим гипотетическую функцию амплитуды спектра плоских волн в виде линейной комбинации двух дельта-функций Дирака. Физически это означает, что у светового поля часть энергии сосредоточена в узкой области спектра распространяющихся плоских волн, а часть – в области затухающих волн:

$$A_n(\rho) = A\delta(\rho - \rho_1) + B\delta(\rho - \rho_2), \tag{22}$$

где  $A > 0, B > 0, 0 < \rho_1 < 1, 1 < \rho_2 < \infty$ .

Тогда, вместо (21), получим:

$$S_z = A\sqrt{1-\rho_1^2} J_n(kr\rho_1) \rho_1 \times \left[ A(2-\rho_1^2) J_n(kr\rho_1) \rho_1 - B(\rho_2^2 - 2) J_n(kr\rho_2) \rho_2 \right]. \tag{23}$$

Заметим, что пучок Бесселя любого порядка является решением непараксиального уравнения Гельмгольца для любого масштаба ( $kr_1 < 1$  – распространяющиеся пучки Бесселя,  $kr_2 > 1$  – исчезающие или затухающие пучки Бесселя). Исчезающие пучки Бесселя используют для преодоления дифракционного предела в ближней зоне [30, 31]. Вблизи оптической оси ( $kr_1 < kr_2 \ll 1$ ), оставляя в разложении Тейлора функции Бесселя только первый член, вместо (23) получим:

$$S_z \approx A\sqrt{1-\rho_1^2} \frac{(kr)^n \rho_1^{n+1}}{n!2^n} \times \frac{(kr)^n}{n!2^n} \left[ A(2-\rho_1^2) \rho_1^{n+1} - B(\rho_2^2 - 2) \rho_2^{n+1} \right] < 0. \tag{24}$$

Из (24) следует, что  $S_z < 0$  при выполнении условия

$$\frac{A}{B} < \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{n+1} \left( \frac{\rho_2^2 - 2}{2 - \rho_1^2} \right) \tag{25}$$

поток энергии вблизи оптической оси в начальной плоскости обратный. Условие (25) возможно, только если  $\rho_2 > 2^{1/2}$ , то есть затухающие волны должны иметь большой коэффициент затухания. Из (24) видно, что при  $n=0$  максимальный обратный поток будет на оптической оси.

### 3. Поперечные проекции вектора Пойнтинга

Для нахождения поперечных проекций вектора Пойнтинга надо знать продольную составляющую вектора напряжённости магнитного поля (14):

$$H_z(r, \varphi, z) = -i^{n+1} \left[ \gamma_+ e^{i(n+1)\varphi} I_{4,n+1} + \gamma_- e^{i(n-1)\varphi} I_{4,n-1} \right], \tag{26}$$

где

$$I_{4,n} = \int_0^\infty \sqrt{1-\rho^2} A_n(\rho) e^{ikz\sqrt{1-\rho^2}} J_n(kr\rho) \rho^2 d\rho. \tag{27}$$

Далее найдём поперечные проекции вектора Пойнтинга в начальной плоскости ( $z=0$ ) только для оптического вихря с левой круговой поляризацией (для правой находится аналогично) и с точностью до постоянной  $c/(8\pi)$ :

$$S_{x-} = \text{Re}(E_{y-} H_{z-}^* - E_{z-} H_{y-}^*), \tag{28}$$

$$S_{y-} = \text{Re}(E_{z-} H_{x-}^* - E_{x-} H_{z-}^*).$$

Подставляя в (28) выражения для проекций электрического и магнитного векторов для левой круговой поляризации (7), (10), (15), (16) и (26), получим:

$$S_{x-} = -\sin \varphi Q_n(r), \quad S_{y-} = \cos \varphi Q_n(r), \tag{29}$$

где

$$Q_n(r) = I_{3,n} I_{4,n-1} + \frac{1}{2} I_{2,n-1} (\bar{I}_{2,n-2} + 2I_{1,n} - \bar{I}_{2,n}). \tag{30}$$

При получении выражения (30) мы предполагали, что все интегралы – действительные числа, то есть учитывались только распространяющиеся волны. Из (29) и (30) видно, что поток энергии в начальной плоскости ( $z=0$ ) направлен по касательной к окружности любого радиуса с центром в начале координат (на оптической оси). То есть вблизи начальной плоскости поток энергии вращается по спирали по часовой или против часовой стрелки в зависимости от знака функции (30).

Для получения конкретного аналитического результата предположим, что амплитуда спектра плоских волн описывается  $\delta$ -функцией Дирака:  $A_n(\rho) = \delta(\rho - \rho_0)$ , где  $0 < \rho_0 < 1$ . Тогда интегралы, входящие в (30), заменяются на подынтегральные выражения, и вместо (30) получим линейную комбинацию двух функций Бесселя:

$$Q_n(r) = J_{n-1}(kr\rho_0) \left[ AJ_n(kr\rho_0) + BJ_{n-1}(kr\rho_0) \right], \tag{31}$$

$$A = 2\rho_0^3 (1 - \rho_0^2),$$

$$B = \frac{n-1}{kr} \rho_0^4.$$

В (31)  $x_0 = kr\rho_0$ . Из (31) видно, что при  $n > 1$  величины  $A$  и  $B$  положительные. Смена знака функции  $Q_n(r)$  происходит в точках  $r_m$ , пропорциональных корням функции Бесселя  $(n-1)$ -го порядка:  $J_{n-1}(\gamma_{n-1,m}) = 0, m = 1, 2, 3 \dots$  Причём, так как нули функции Бесселя перемежаются  $\gamma_{n-1,1} < \gamma_{n,1} < \gamma_{n-1,2} < \gamma_{n,2} < \dots$ , то перед корнем  $\gamma_{n-1,m}$  и вблизи этого корня обе функции Бесселя  $n$ -го и  $(n-1)$ -го порядков будут иметь одинаковые знаки (то

есть функция  $Q_n(r)$  положительная). После корня  $\gamma_{n-1,m}$  и вблизи него знак функции Бесселя  $(n-1)$ -го порядка изменится, а знак выражения в круглых скобках в (30) ещё не изменится, и поэтому у всего выражения (31) знак будет отрицательный. Поэтому функция  $Q_n(r)$  будет отрицательная при  $r_m < r < r_m + \delta$ , где  $r_m = \gamma_{n-1,m} / (k\rho_0)$ , а  $\delta$  – некоторая неизвестная величина, определяемая расстоянием между соседними корнями  $\delta < (\gamma_{n,m} - \gamma_{n-1,m}) / (k\rho_0)$ . Чтобы определить, на каких радиусах в картине интенсивности происходит смена знака функции (31), запишем интенсивность (12) для левой поляризации с учётом выбранной амплитуды спектра плоских волн  $A_n(\rho) = \delta(\rho - \rho_0)$ ,  $0 < \rho_0 < 1$ . Тогда получим:

$$\begin{aligned} I_- &= CJ_n^2(x_0) + DJ_{n-1}^2(x_0), \\ C &= 2\rho_0^2(1 - \rho_0^2), \\ D &= \rho_0^4. \end{aligned} \quad (32)$$

Из (32) следует, что локальные минимумы (тёмные кольца) будут находиться на радиусах, расположенных между корнями двух соседних функций Бесселя  $J_{n-1}(x)$ ,  $J_n(x)$ , то есть примерно на радиусах  $\bar{r}_m \approx (\gamma_{n-1,m} + \gamma_{n,m}) / (2k\rho_0)$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Сравнивая выражения (31) и (32), приходим к заключению, что отрицательные значения функции  $Q_n(r) < 0$  (поток энергии вращается по часовой стрелке) будут лежать на внешних сторонах светлых колец в распределении интенсивности (32) при  $r_m < r < r_m + \delta < \bar{r}_m$ . На внутренних сторонах (а вернее, на остальной части светлого кольца) светлых колец ( $\bar{r}_m < r < r_{m+1}$ ) вращение потока энергии будет против часовой стрелки ( $Q_n(r) > 0$ ).

#### 4. Моделирование

Рассмотрим световое поле с угловым спектром (22). Это поле представляет собой суперпозицию двух мод Бесселя – одной распространяющейся и одной затухающей:

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= e^{i\varphi} \left[ Ae^{ikz\sqrt{1-\rho_1^2}} J_n(kr\rho_1) + \right. \\ &\left. + iBe^{ikz\sqrt{1-\rho_2^2}} J_n(kr\rho_2) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

$$E_y = i\sigma E_x.$$

Тогда, согласно (25), при условии

$$\frac{A}{B} < \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^n \left( \frac{\rho_2^2 - 2}{2 - \rho_1^2} \right) \sqrt{\frac{1 - \rho_1^2}{\rho_2^2 - 1}} \quad (34)$$

вблизи оптической оси в начальной плоскости возникает обратный поток энергии. Выполнения условия (34) всегда можно добиться увеличением вклада  $B$  затухающих волн.

Для численного моделирования выберем следующие параметры: длина волны  $\lambda = 532$  нм,  $\rho_1 = 0,8$ ,  $\rho_2 = 2,4$ ,  $A = 1$ , топологический заряд  $n = 3$ , поляризация – левая круговая ( $\sigma = -1$ ) и правая круговая ( $\sigma = +1$ ), расчётная область  $z = 0$ ,  $-R \leq x$ ,  $y \leq R$  ( $R = 2,5\lambda$ ). Из (34) следует, что для возникновения обратного потока необходимо, чтобы  $A/B < 20,53$ . Вы-

берем  $B = 1$  и  $B = 10$ . На рис. 1 приведены распределения интенсивности и потока мощности суперпозиции мод Бесселя (33) в начальной плоскости для разного вклада затухающей моды  $B = 1$  (рис. 1а, б) и  $B = 10$  (рис. 1в, г), а также для разной круговой поляризации.

Из рис. 1 видно, что при усилении вклада затухающих волн усиливается и мощность отрицательного светового потока. Так, при  $B = 1$  максимальная (по модулю) мощность отрицательного потока составила 7,4% от максимальной мощности положительного потока, в то время как при  $B = 10$  это соотношение составило 75%. Также видно, что отрицательный поток возникает в первом световом кольце, так как кольцо у затухающей моды Бесселя имеет меньший диаметр.

Далее рассмотрим формирование отрицательного потока для безвихревого поля ( $n = 0$ ). На рис. 2 приведено распределение интенсивности и потока мощности суперпозиции мод Бесселя (33) в начальной плоскости. Вклад затухающей моды  $B = 10$ , поляризации – левая круговая, остальные параметры те же, что и на рис. 1.

Из рис. 2 видно, что в этом случае максимальный отрицательный поток формируется в центре дифракционной картины.

В эксперименте найти и зарегистрировать обратный поток энергии достаточно трудно, так как он возникает в области светлых колец в распределении интенсивности (рис. 1). Поэтому для обнаружения обратного потока нужно одновременно измерять и распределение интенсивности в плоскости фокуса, и распределение модуля потока энергии. Если на одном и том же радиусе в плоскости фокуса интенсивность отлична от нуля (светлое кольцо), а распределение модуля вектора Пойнтинга равно нулю (тёмное кольцо), то в этом месте поток энергии распространяется в обратном направлении. Заметим, что при обратном распространении рассмотренного вихря картины интенсивности и потока энергии такие же, как на рис. 1, будет возникать в плоскости фокуса.

#### Заключение

В работе на основе разложения по плоским волнам получены все шесть проекций векторов напряжённости электрического и магнитного поля для оптического вихря с произвольным целым топологическим зарядом, круговой поляризацией и произвольной радиально-симметричной действительной функцией амплитуды плоских волн. Получены также выражения для распределения интенсивности и всех трёх проекций вектора Пойнтинга в начальной плоскости оптического вихря только с левой круговой поляризацией. В частном случае узкого углового спектра плоских волн (пучок Бесселя) показано, что при наличии в начальном световом поле неоднородных затухающих волн на оптической оси может возникать обратный поток световой энергии. Этот обратный поток можно использовать, чтобы «затянуть» микрочастицу в центр кольцевой перетяжки вихревого пучка, то есть продемонстрировать эффект «оптического трактора». Также показано, что в начальной плоско-

сти (в плоскости перетяжки) имеет место эффект «углового трактора», когда на разных радиусах относительно оптической оси поперечный поток энергии вращается по часовой или против часовой стрелки. С

помощью полученных общих выражений можно анализировать особенности продольного и поперечного световых потоков энергии и для других известных точных решений уравнения Максвелла.

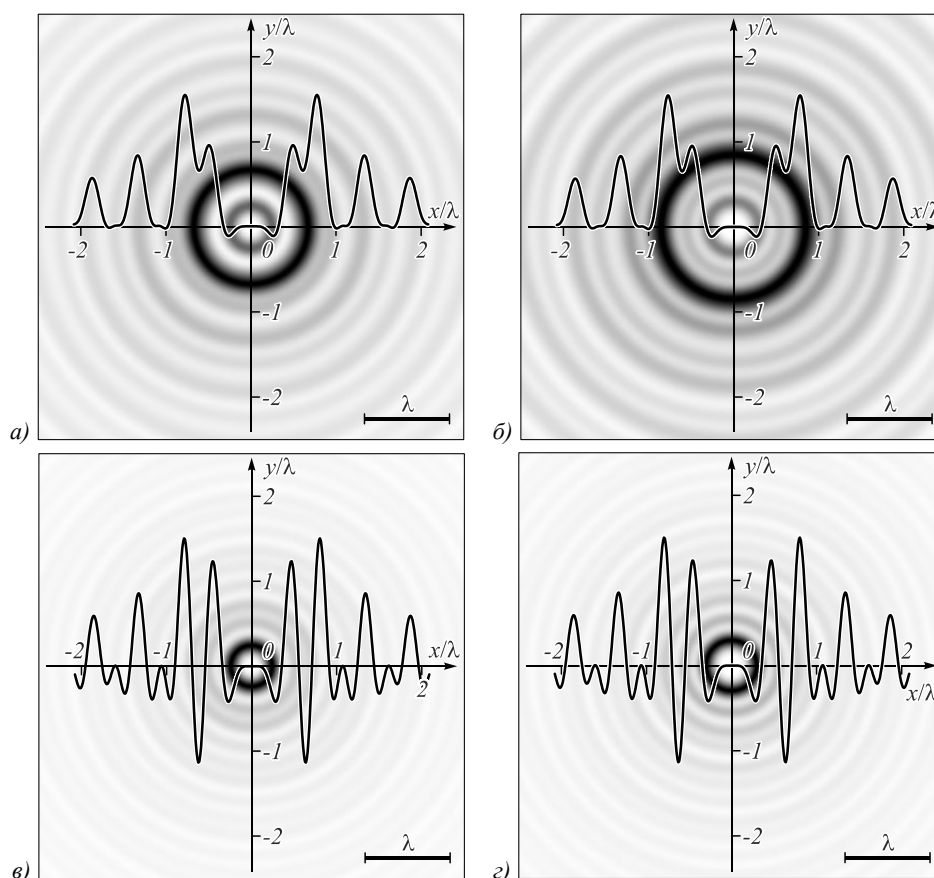


Рис. 1. Двумерные распределения интенсивности (негатив) и наложенные на них одномерные распределения потока мощности суперпозиции двух мод Бесселя (33) в начальной плоскости ( $z = 0$ ) для разного вклада затухающей моды  $V = 1$  (а, б) и  $V = 10$  (в, г), а также для левой (а, в) и правой круговой поляризации (б, г)

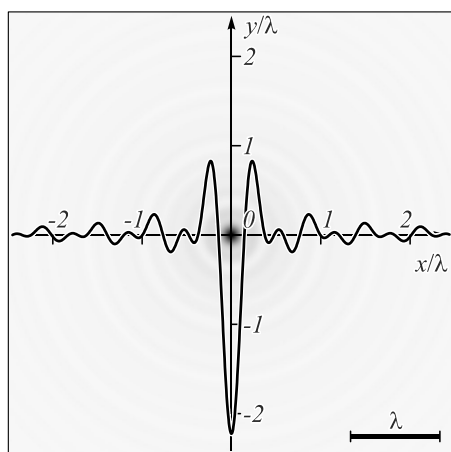


Рис. 2. Двумерное распределение интенсивности (негатив) и наложенное на него одномерное распределение потока мощности суперпозиции двух мод Бесселя (33) в начальной плоскости ( $z = 0$ )

#### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 17-19-01186) в части «Интенсив-

ность и продольная проекция вектора Пойнтинга», Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-29-20003 в части «Обратный поток энергии в начальной плоскости» и грант 18-07-01129 в части «Поперечные проекции вектора Пойнтинга»), а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках Государственного задания ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение № 007-ГЗ/Ч3363/26) в части «Моделирование».

#### Литература

1. **Diekmann, R.** Nanoscopy of bacterial cells immobilized by holographic optical tweezers / R. Diekmann, D.L. Wolfson, C. Spahn, M. Heilemann, M. Schuttpelz, T. Huser // *Nature Communications*. – 2016. – Vol. 7. – 13711. – DOI: 10.1038/ncomms13711.
2. **Mitri, F.C.** Optical tractor Bessel polarized beams / F.C. Mitri, R.X. Li, L.X. Guo, C.Y. Ding // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. – 2017. – Vol. 187. – P. 97-115. – DOI: 10.1016/j.jqsrt.2016.09.023.
3. **Wilk, S.R.** The pull of the tractor beam / S.R. Wilk // *Optics and Photonics News*. – 2009. – Vol. 20. – P. 12-15.
4. **Pfeiffer, C.** Generating stable tractor beams with dielectric metasurfaces / C. Pfeiffer, A. Grbic // *Physical Review B*. –

2015. – Vol. 91, Issue 11. – 115408. – DOI: 10.1103/PhysRevB.91.115408.
5. **Mitri, F.C.** Superposition of nonparaxial vectorial complex-source spherically focused beams: Axial Pointing singularity and reverse propagation / F.C. Mitri // *Physical Review A*. – 2016. – Vol. 94, Issue 2. – 023801. – DOI: 10.1103/PhysRevA.94.023801.
  6. **Salem, M.A.** Energy flow characteristics of vector X-waves / M.A. Salem, H. Bağcı // *Optics Express*. – 2011. – Vol. 19, Issue 9. – P. 8526-8532. – DOI: 10.1364/OE.19.008526.
  7. **Yuan, G.H.** Gigantic wavevectors and energy backflow in the focus of a superoscillatory lens / G.H. Yuan, N. Zheludev // 2017 Conference on Lasers and Electro-Optics Europe & European Quantum Electronics Conference (CLEO/Europe-EQEC). – DOI: 10.1109/CLEOE-EQEC.2017.8087772.
  8. **Котляр, В.В.** Плотность углового момента параксиального оптического вихря с круговой поляризацией / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв // *Компьютерная оптика*. – 2018. – Т. 42, № 1. – С. 5-12. – DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-1-5-12.
  9. **Wang, R.** Subwavelength gold grating as polarizers integrated with InP-based InGaAs sensors / R. Wang, T. Li, X. Shao, X. Li, X. Huang, J. Shao, Y. Chen, H. Gong // *ACS Applied Materials and Interfaces*. – 2015. – Vol. 7, Issue 26. – P. 14471-14476. – DOI: 10.1021/acsami.5b03679.
  10. **Kotlyar, V.V.** High resolution through gradient-index microoptics / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.G. Nalimov, S.S. Stafeev // *Advances in Optical Technologies*. – 2012. – Vol. 2012. – 647165. – DOI: 10.1155/2012/647165.
  11. **Kotlyar, V.V.** Analysis of the shape of a subwavelength focal spot for the linear polarized light / V.V. Kotlyar, S.S. Stafeev, Y. Liu, L. O'Faolain, A.A. Kovalev // *Applied Optics*. – 2013. – Vol. 52, Issue 3. – P. 330-339. – DOI: 10.1364/AO.52.000330.
  12. **Čižmár, T.** An optical nanotrap array movable over a millimetre range / T. Čižmár, M. Šiler, P. Zemánek // *Applied Physics B*. – 2006. – Vol. 84, Issues 1-2. – P. 197-203. – DOI: 10.1007/s00340-006-2221-2.
  13. **Schouten, H.F.** Optical vortices near sub-wavelength structures / H.F. Schouten, T.D. Visser, D. Lenstra // *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*. – 2004. – Vol. 6, Issue 5. – P. S404-S409. – DOI: 10.1088/1464-4266/6/5/031.
  14. **Braunbek, W.** Einzelheiten zur Halbebenen-Beugung / W. Braunbek, G. Laukien // *Optik*. – 1952. – Vol. 9. – P. 174-179.
  15. **Novitsky, A.V.** Negative propagation of vector Bessel beams / A.V. Novitsky, D.V. Novitsky // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2012. – Vol. 24, Issue 9. – P. 2844-2849. – DOI: 10.1364/JOSAA.24.002844.
  16. **Mitri, F.G.** Reverse propagation and negative angular momentum density flux of an optical nondiffracting nonparaxial fractional Bessel vortex beam of progressive waves / F.G. Mitri // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2016. – Vol. 33, Issue 9. – P. 1661-1667. – DOI: 10.1364/JOSAA.33.001661.
  17. **Vaveliuk, P.** Negative propagation effect in nonparaxial Airy beams / P. Vaveliuk, O. Martinez-Matos // *Optics Express*. – 2012. – Vol. 20, Issue 24. – P. 26913-26921. – DOI: 10.1364/OE.20.026913.
  18. **Richards, B.** Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic systems / B. Richards, E. Wolf // *Proceedings of The Royal Society A*. – 1959. – Vol. 253, Issue 1274. – P. 358-379. – DOI: 10.1098/rspa.1959.0200.
  19. **Игнатовский, В.С.** Дифракция объектива при любом отверстии / В.С. Игнатовский // *Труды ГОИ*. — Петроград. – 1919. – Т. 1. – С. 1-36.
  20. **Karman, G.P.** Creation and annihilation of phase singularities in a focal field / G.P. Karman, M.W. Beijersbergen, A. van Duijl, J.P. Woerdman // *Optics Letters*. – 1997. – Vol. 22, Issue 9. – P. 1503-1505. – DOI: 10.1364/OL.22.001503.
  21. **Berry, M.V.** Wave dislocation reactions in non-paraxial Gaussian beams / M.V. Berry // *Journal of Modern Optics*. – 1998. – Vol. 45, Issue 9. – P. 1845-1858. – DOI: 10.1080/09500349808231706.
  22. **Volyar, A.V.** Nonparaxial Gaussian beams. 1. Vector fields / A.V. Volyar // *Technical Physics Letters*. – 2000. – Vol. 26, Issue 7. – P. 573-575. – DOI: 10.1134/1.1262917.
  23. **Volyar, A.V.** The structure of a nonparaxial Gaussian beam near the focus. II. Optical vortices / A.V. Volyar, V.G. Shvedov, T.A. Fadeeva // *Optics and Spectroscopy*. – 2001. – Vol. 90, Issue 1. – P. 93-100. – DOI: 10.1134/1.1343551.
  24. **Котляр, В.В.** Формирование и фокусировка векторного оптического вихря с помощью металлинзы / В.В. Котляр, А.Г. Налимов // *Компьютерная оптика*. – 2017. – Т. 41, № 5. – С. 645-654. – DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-5-645-654.
  25. **Monteiro, P.B.** Angular momentum of focused beams: Beyond the paraxial approximation / P.B. Monteiro, P.A.M. Neto, H.M. Nussenzveig // *Physical Review A*. – 2009. – Vol. 79, Issue 3. – 033830. – DOI: 10.1103/PhysRevA.79.033830.
  26. **Dogariu, A.** Optically induced 'negative forces' / A. Dogariu, S. Sukhov, J.J. Saenz // *Nature Photonics*. – 2012. – Vol. 7. – P. 24-27. – DOI: 10.1038/nphoton.2012.315.
  27. **Shvedov, V.** A long-range polarization-controlled optical tractor beam / V. Shvedov, A.R. Davoyan, C. Hnatovsky, N. Engheta, W. Krolikowski // *Nature Photonics*. – 2014. – Vol. 8. – P. 846-850. – DOI: 10.1038/nphoton.2014.242.
  28. **Миллер, У.** Симметрия и разделение переменных / У. Миллер. – Мир, Москва, 1981. – 343 с.
  29. **Kotlyar, V.V.** Circularly polarized Hankel vortices / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *Optics Express*. – 2017. – Vol. 25, Issue 7. – P. 7778-7790. – DOI: 10.1364/OE.25.007778.
  30. **Merlin, R.** Radiationless electromagnetic interference: evanescent-field lenses and perfect focusing / R. Merlin // *Science*. – 2007. – Vol. 317, Issue 5840. – P. 927-929. – DOI: 10.1126/science.1143884.
  31. **Grbic, A.** Near-field plates: subdiffraction focusing with patterned surfaces / A. Grbic, L. Jiang, R. Merlin // *Science*. – 2008. – Vol. 320, Issue 5875. – P. 511-513. – DOI: 10.1126/science.1154753.

#### Сведения об авторах

Информацию об авторах **Котляр Виктор Викторович** и **Ковалёв Алексей Андреевич** см. стр.51 этого номера.

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 17 октября 2018 г. Окончательный вариант – 30 октября 2018 г.

## Reverse flux of energy of a nonparaxial optical vortex in the near field

V.V. Kotlyar<sup>1,2</sup>, A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, 443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151;

<sup>2</sup>Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye shosse 34

### Abstract

In this work, using an expansion in terms of plane waves, we obtain all six components of the electric and magnetic field vectors for an elliptically polarized optical vortex with an arbitrary integer topological charge. We also obtain expressions for the distributions of the field intensity and the Poynting vector components in the initial plane of this optical vortex. For the particular case of a narrow angular spectrum of plane waves (Bessel beam) and for circular polarization, it is shown that in the presence of inhomogeneous evanescent waves in the initial light field, a reverse flux of light energy can occur near the optical axis. It is also shown that in the initial plane the effect of an “angular tractor” occurs, when at different distances from the optical axis the transverse energy flux rotates clockwise or counterclockwise. Using the obtained general expressions, the light flux for other known exact solutions of the Maxwell equations can be analyzed.

**Keywords:** optical vortex, angular spectrum of plane waves, evanescent waves, Poynting vector, reverse power flow, optical “tractor”.

**Citation:** Kotlyar VV, Kovalev AA. Reverse flux of energy of a nonparaxial optical vortex in the near field. *Computer Optics* 2019; 43(1): 54-62. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-1-54-62.

**Acknowledgements:** This work was partly funded by the RF Ministry of Science and Higher Education within the state project of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS under agreement 007-Г3/Ч3363/26 (“Intensity and longitudinal component of the Poynting vector”), the Russian Science Foundation under project No. 17-19-01186 (“Reverse flux of energy in the initial plane” and “Transverse components of the Poynting vector”), and the Russian Foundation for Basic Research under projects ## 18-29-20003, 18-07-01129 (“Simulation”).

### References

- [1] Diekmann R, Wolfson DL, Spahn C, Heilemann M, Schuttelpeiz M, Huser T. Nanoscopy of bacterial cells immobilized by holographic optical tweezers. *Nat Commun* 2016; 7: 13711. DOI: 10.1038/ncomms13711.
- [2] Mitri FC, Li RX, Guo LX, Ding CY. Optical tractor Bessel polarized beams. *J Quant Spectr Rad Trans* 2017; 187: 97-115. DOI: 10.1016/j.jqsrt.2016.09.023.
- [3] Wilk SR. The pull of the tractor beam. *Optics and Photonics News* 2009; 20: 12-15.
- [4] Pfeiffer C, Grbic A. Generating stable tractor beams with dielectric metasurfaces. *Phys Rev B* 2015; 91(11): 115408. DOI: 10.1103/PhysRevB.91.115408.
- [5] Mitri FC. Superposition of nonparaxial vectorial complex-source spherically focused beams: Axial Pointing singularity and reverse propagation. *Phys Rev A* 2016; 94(2): 023801. DOI: 10.1103/PhysRevA.94.023801.
- [6] Salem MA, Bağcı H. Energy flow characteristics of vector X-waves. *Opt Express* 2011; 19(9): 8526-8532. DOI: 10.1364/OE.19.008526.
- [7] Yuan GH, Zheludev N. Gigantic wavevectors and energy backflow in the focus of a superoscillatory lens. 2017 Conference on Lasers and Electro-Optics Europe & European Quantum Electronics Conference (CLEO/Europe-EQEC). DOI: 10.1109/CLEO-EQEC.2017.8087772.
- [8] Kotlyar VV, Kovalev AA Angular momentum density of a circularly polarized paraxial optical vortex. *Computer Optics* 2018; 42(1): 5-12. DOI: 10.18287/2412-6179-2018-42-1-5-12.
- [9] Wang R, Li T, Shao X, Li X, Huang X, Shao J, Chen Y, Gong H. Subwavelength gold grating as polarizers integrated with InP-based InGaAs sensors. *ACS Appl Mater Interfaces* 2015; 7(26): 14471-14476. DOI: 10.1021/acsami.5b03679.
- [10] Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG, Stafeev SS. High resolution through gradient-index microoptics. *Adv Opt Technol* 2012; 2012: 647165. DOI: 10.1155/2012/647165.
- [11] Kotlyar VV, Stafeev SS, Liu Y, O’Faolain L, Kovalev AA. Analysis of the shape of a subwavelength focal spot for the linear polarized light. *Appl Opt* 2013; 52(3): 330-339. DOI: 10.1364/AO.52.000330.
- [12] Čížmár T, Šiler M, Zemánek P. An optical nanotrap array movable over a millimetre range. *Appl Phys B* 2006; 84(1-2): 197-203. DOI: 10.1007/s00340-006-2221-2.
- [13] Schouten HF, Visser TD, Lenstra D. Optical vortices near sub-wavelength structures. *J Opt B: Quant Semiclass Opt* 2004; 6(5): S404-S409. DOI: 10.1088/1464-4266/6/5/031.
- [14] Braunbek W, Laukien G. Einzelheiten zur Halbebene-Beugung. *Optik* 1952; 9: 174-179.
- [15] Novitsky AV, Novitsky DV. Negative propagation of vector Bessel beams. *J Opt Soc Am A* 2012; 24(9): 2844-2849. DOI: 10.1364/JOSAA.24.002844.
- [16] Mitri FG. Reverse propagation and negative angular momentum density flux of an optical nondiffracting nonparaxial fractional Bessel vortex beam of progressive waves. *J Opt Soc Am A* 2016; 33(9): 1661-1667. DOI: 10.1364/JOSAA.33.001661.
- [17] Vaveliuk P, Martinez-Matos O. Negative propagation effect in nonparaxial Airy beams. *Opt Express* 2012; 20(24): 26913-26921. DOI: 10.1364/OE.20.026913.
- [18] Richards B, Wolf E. Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic systems. *Proc R Soc A* 1959; 253(1274): 358-379. DOI: 10.1098/rspa.1959.0200.
- [19] Ignatovsky VS. Diffraction by a lens having arbitrary opening. *Transactions of the Optical Institute of Petrograd* 1919; 1: 1-36.
- [20] Karman GP, Beijersbergen MW, van Duijl A, Woerdman JP. *Opt Lett* 1997; 22(9): 1503-1505. DOI: 10.1364/OL.22.001503.



- [21] Berry MV. Wave dislocation reactions in non-paraxial Gaussian beams. *J Mod Opt* 1008; 45(9): 1845-1858. DOI: 10.1080/09500349808231706.
- [22] Volyar AV. Nonparaxial Gaussian beams. 1. Vector fields. *Techn Phys Lett* 2000; 26(7): 573-575. DOI: 10.1134/1.1262917.
- [23] Volyar AV, Shvedov VG, Fadeeva TA. The structure of a nonparaxial Gaussian beam near the focus. II. Optical vortices. *Opt Spectr* 2001; 90(1): 93-100. DOI: 10.1134/1.1343551.
- [24] Kotlyar VV, Nalimov AG. A vector optical vortex generated and focused using a metalens. *Computer Optics* 2017; 41(5): 645-654. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-41-5-645-654.
- [25] Monteiro PB, Neto PAM, Nussenzveig HM. Angular momentum of focused beams: Beyond the paraxial approximation. *Phys Rev A* 2009 79(3), 033830. DOI: 10.1103/PhysRevA.79.033830.
- [26] Dogariu A, Sukhov S, Saenz JJ. Optically induced 'negative forces'. *Nat Photon* 2012; 7: 24-27. DOI: 10.1038/nphoton.2012.315.
- [27] Shvedov V, Davoyan AR, Hnatovsky C, Engheta N, Krolikowski W. A long-range polarization-controlled optical tractor beam. *Nat Photon* 2014; 8: 846-850. DOI: 10.1038/nphoton.2014.242.
- [28] Miller W. Symmetry and separation of variables. London: Addison-Wesley Publishing Company; 1977. ISBN: 978-0-521-30224-1.
- [29] Kotlyar VV, Kovalev AA. Circularly polarized Hankel vortices. *Opt Express* 2017; 25(7): 7778-7790. DOI: 10.1364/OE.25.007778.
- [30] Merlin R. Radiationless electromagnetic interference: evanescent-field lenses and perfect focusing. *Science* 2007; 317(5840): 927-929. DOI: 10.1126/science.1143884.
- [31] Grbic A, Jiang L, Merlin R. Near-field plates: subdiffraction focusing with patterned surfaces. *Science* 2008; 320(5875): 511-513. DOI: 10.1126/science.1154753.

---

#### *Authors' information*

The information about author **Victor Victorovich Kotlyar** and **Alexey Andreevich Kovalev** you can find on page 53 of this issue.

---

*Received October 17, 2018. The final version – October 30, 2018.*

---