

ТРАЕКТОРИИ ЛУЧЕЙ В РАДИАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОЙ СРЕДЕ

С.Е. Курушина, В.В. Максимов, Ю.Л. Ратис

Самарский государственный аэрокосмический университет

Аннотация

Аналитические решения лучевого уравнения получены для радиально – градиентной среды с профилем показателя преломления, ограниченными членами четвертой и шестой степени расстояния от оптической оси в разложении показателя преломления в ряд.

Введение

Для анализа оптических систем, содержащих элементы с радиально-градиентным профилем показателя преломления, необходимо знать представленное в аналитическом виде уравнение траектории луча, распространяющегося в такой среде.

Один из возможных способов аналитического решения лучевого уравнения состоит в представлении траектории луча в виде разложения по степеням расстояния z , измеренного вдоль оси симметрии профиля показателя преломления. Полученные на этой основе формулы представлены в работе [1]. Недостаток этого способа заключается в том, что при практических расчетах бесконечные ряды заменяются конечными суммами, в результате чего ход луча рассчитывается приближенно.

Другой способ основан на методе последовательных приближений. Этот способ был применен в работах [2, 3, 4] к радиально-градиентным средам с положительной оптической силой, и обобщен в работе [5] на среды как с положительной, так и отрицательной оптическими силами.

В данной работе предложен метод определения траектории луча в цилиндрической системе координат, позволяющий для среды заданной оптической силы найти координаты произвольной точки луча ρ (расстояние от оптической оси) и φ (полярный угол) в зависимости от расстояния z , измеренного вдоль оси симметрии профиля показателя преломления.

Постановка задачи

Для среды с радиально-градиентным распределением показателя преломления его профиль определяется выражением:

$$n = \sum_{k=0} n_k \rho^{2k}, \quad (1)$$

где ρ - расстояние от оптической оси системы. Тогда с учетом ρ^6 :

$$n = n_0 - \text{sign}(-n_1)n_1\rho^2 + n_2\rho^4 + n_3\rho^6 + \dots \quad (2)$$

Здесь

$$\text{sign}(-n_1) = \begin{cases} 1, (n_1 < 0) \\ 0, (n_1 = 0) \\ -1, (n_1 > 0) \end{cases}. \quad (3)$$

Если первый коэффициент радиального градиента $n_1 < 0$, то среда обладает положительной оптической силой.

Квадрат показателя преломления может быть представлен в виде:

$$n^2 = n_0^2 (1 - \text{sign}(-n_1)\tau_1^2\rho^2 + \tau_1^4\tau_2\rho^4 - \text{sign}(-n_1)\tau_1^6\tau_3\rho^6 + \dots), \quad \text{где}$$

$$\tau_1^2 = \frac{2|n_1|}{n_0}, \quad (4)$$

$$\tau_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{n_2 n_0}{n_1^2} \right),$$

$$\tau_3 = \frac{n_0}{4n_1^2} \left(n_2 + \frac{n_3 n_0}{n_1} \right).$$

Ход луча будем описывать в цилиндрической полярной системе координат, ось Oz которой совпадает с осью симметрии распределения показателя преломления.

Учитывая, что показатель преломления зависит только от координаты ρ , в выбранной системе координат лучевое уравнение принимает вид [6]

$$\frac{d}{ds} \left[n \left(\frac{d\rho}{ds} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\varphi}{ds} \vec{e}_\varphi + \frac{dz}{ds} \vec{e}_z \right) \right] = \frac{dn}{d\rho} \vec{e}_\rho, \quad (5)$$

где $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ - единичные орты цилиндрической полярной системы координат. После преобразований [6] это уравнение можно представить в виде системы двух уравнений для компонент ρ и φ

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{dz} &= \frac{1}{\beta_z} \left(n^2(\rho) - \beta_z^2 - \frac{\beta_\varphi^2}{\rho^2} \right)^{1/2} \\ \frac{d\varphi}{d\rho} &= \frac{\beta_\varphi}{\rho^2} \left(n^2(\rho) - \beta_z^2 - \frac{\beta_\varphi^2}{\rho^2} \right)^{-1/2} \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

где величины

$$\begin{aligned} \beta_z &= n(\rho) \cos \gamma = n(\rho_0) \cos \gamma_0 \\ \beta_\varphi &= n(\rho) \rho \sin \gamma \cos \phi = n(\rho_0) \rho_0 \sin \gamma_0 \cos \phi_0 \end{aligned} \quad (7)$$

являются инвариантами в радиально-градиентной среде. Углы γ и ϕ показаны на рис. 1. Величина β_z представляет собой оптический направляющий косинус луча относительно оси Oz .

Точка входа луча в неоднородную среду характеризуется величинами ρ_0 и φ_0 .

Таким образом, задача определения траектории луча, распространяющегося в радиально-градиентной среде с профилем показателя преломления, ограниченными членами четвертой и шестой степени расстояния от оптической оси в разложении показателя преломления в ряд, сводится к решению системы дифференциальных уравнений (6) с учетом выражения (4) при заданных начальных условиях.

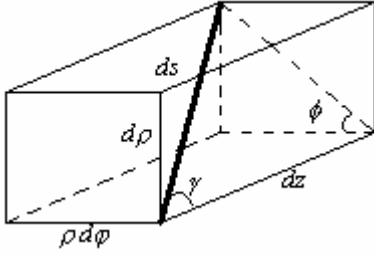


Рис. 1. Разложение элемента длины луча на компоненты

Анализ траекторий лучей

1. Квадрат показателя преломления ограничен ρ^4

Запишем первое из уравнений системы (6) для случая, когда

$$n^2 = n_0^2(1 - \text{sign}(-n_1)\tau_1^2\rho^2 + \tau_1^4\tau_2\rho^4) : \quad (8)$$

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{1}{\beta_z}(n_0^2 - \beta_z^2 - \text{sign}(-n_1)n_0^2\tau_1^2\rho^2 + n_0^2\tau_1^4\tau_2\rho^4 - \frac{\beta_\phi^2}{\rho^2})^{1/2} \quad (9)$$

При $n_1 > 0$, когда среда обладает отрицательной оптической силой, $-\text{sign}(-n_1)n_0^2\tau_1^2 = n_0^2\tau_1^2$, что далее в формулах соответствует верхнему знаку.

В случае $n_1 < 0$ среда обладает положительной оптической силой, $-\text{sign}(-n_1)n_0^2\tau_1^2 = -n_0^2\tau_1^2$, что далее в формулах соответствует нижнему знаку.

После замены $\rho^2 = \xi$ получим

$$\frac{d\xi}{dz} = \frac{2}{\beta_z}(n_0^2\tau_1^4\tau_2\xi^3 \pm n_0^2\tau_1^2\xi^2 + (n_0^2 - \beta_z^2)\xi - \beta_\phi^2)^{1/2} \quad (10)$$

Приведем кубический многочлен к каноническому виду

$$\frac{d\xi}{dz} = \frac{2n_0\tau_1^2\sqrt{\tau_2}}{\beta_z}(\xi^3 \pm \frac{1}{\tau_1^2\tau_2}\xi^2 + \frac{(n_0^2 - \beta_z^2)}{n_0^2\tau_1^4\tau_2}\xi - \frac{\beta_\phi^2}{n_0^2\tau_1^4\tau_2})^{1/2} \quad (11)$$

и сделаем замену переменных [9]

$$\eta = \xi \pm 1 / 3\tau_1^2\tau_2; d\eta = d\xi.$$

Для кубического многочлена получим приведенное выражение. Тогда

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{2n_0\tau_1^2\sqrt{\tau_2}}{\beta_z}(\eta^3 + p\eta + q)^{1/2}, \quad (12)$$

где

$$p = \frac{3(n_0^2 - \beta_z^2)\tau_2 - n_0^2}{3n_0^2\tau_1^4\tau_2^2} \quad (13)$$

$$q = \frac{\pm 2n_0^2 \mp 9\tau_2(n_0^2 - \beta_z^2) - 27\tau_1^2\tau_2^2\beta_\phi^2}{27n_0^2\tau_1^6\tau_2^3}$$

Решение дифференциального уравнения (12) зависит от вида корней уравнения $\eta^3 + p\eta + q = 0$. Дискриминант этого уравнения D определяется выражением [9]:

$$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \frac{(n_0^2 - \beta_z^2)^2 [4\tau_2(n_0^2 - \beta_z^2) - n_0^2]}{4 * 27n_0^6\tau_1^{12}\tau_2^4} + \frac{n_0^2\tau_1^2\beta_\phi^2 [27\tau_1^2\tau_2^2\beta_\phi^2 \mp 4n_0^2 \pm 18\tau_2(n_0^2 - \beta_z^2)]}{4 * 27n_0^6\tau_1^{12}\tau_2^4} \quad (14)$$

а) Кубическое уравнение имеет действительные корни, если $D \leq 0$ и $p < 0$ [9]. Положим

$$R = \frac{(\text{sign}q)\sqrt{|p|}}{3} \quad (15)$$

$$\cos \Psi = \frac{q}{2R^3}$$

Тогда действительные корни определяются выражениями [9]:

$$\eta_1 = -2R \cos \frac{\Psi}{3}$$

$$\eta_2 = -2R \cos \left(\frac{\Psi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \quad (16)$$

$$\eta_3 = -2R \cos \left(\frac{\Psi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right)$$

Для многочлена

$$\xi^3 \pm \frac{1}{\tau_1^2\tau_2}\xi^2 + \frac{(n_0^2 - \beta_z^2)}{n_0^2\tau_1^4\tau_2}\xi - \frac{\beta_\phi^2}{n_0^2\tau_1^4\tau_2} \quad (17)$$

действительные корни определяются следующим образом

$$\xi_1 = \eta_1 \mp \frac{1}{3\tau_1^2\tau_2} = -2R \cos \frac{\Psi}{3} \mp \frac{1}{3\tau_1^2\tau_2}$$

$$\xi_2 = \eta_2 \mp \frac{1}{3\tau_1^2\tau_2} = -2R \cos \left(\frac{\Psi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \mp \frac{1}{3\tau_1^2\tau_2} \quad (18)$$

$$\xi_3 = \eta_3 \mp \frac{1}{3\tau_1^2\tau_2} = -2R \cos \left(\frac{\Psi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) \mp \frac{1}{3\tau_1^2\tau_2}$$

Обозначим наименьший из корней ξ_i через α , средний по величине – через β , а наибольший по величине – γ . Тогда уравнение (11) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d\xi}{dz} = \frac{2n_0\tau_1^2\sqrt{\tau_2}}{\beta_z}((\xi - \alpha)(\xi - \beta)(\xi - \gamma))^{1/2} \quad (19)$$

После разделения переменных получим:

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - \alpha)(\xi - \beta)(\xi - \gamma)}} = \frac{2n_0\tau_1^2\sqrt{\tau_2}}{\beta_z} dz \quad (20)$$

В левой части этого уравнения под знаком корня должна стоять положительная величина, т. е. выражение (17) должно быть ≥ 0 . Это условие выполняется для интервалов:

1. $\alpha \leq \xi \leq \beta$ и

2. $\gamma \leq \xi$.

Рассмотрим решения системы (6) для каждого из этих интервалов.

1. $\alpha \leq \xi \leq \beta$.

Для решения уравнения (20) введем новую переменную φ по правилу [7]

$$\xi = \alpha + (\beta - \alpha) \sin^2 \varphi. \quad (21)$$

После несложных преобразований из уравнения (20) можно получить:

$$\frac{2}{\sqrt{\gamma - \alpha}} \int_{u_0}^u \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2n_0 \tau_1^2 \sqrt{\tau_2}}{\beta_z} (z - z_0), \quad (22)$$

где

$$k^2 = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}$$

$$0 < k^2 < 1$$

$$u_0 = \arcsin \sqrt{\frac{\rho_0^2 - \alpha}{\beta - \alpha}}. \quad (23)$$

$$u = \arcsin \sqrt{\frac{\rho^2 - \alpha}{\beta - \alpha}}$$

В результате, после интегрирования выражения (22), получим:

$$F(u, k) = \frac{n_0 \tau_1^2 \sqrt{\tau_2 (\gamma - \alpha)}}{\beta_z} (z - z_0 + z')$$

$$z' = \frac{\beta_z F(u_0, k)}{n_0 \tau_1^2 \sqrt{\tau_2 (\gamma - \alpha)}}. \quad (24)$$

Здесь $F(u, k)$ - неполный нормальный эллиптический интеграл первого рода [8]. После обращения интеграла (24) окончательно получим:

$$\rho^2 = \alpha + (\beta - \alpha) sn^2 \left[\frac{n_0 \tau_1^2 \sqrt{\tau_2 (\gamma - \alpha)}}{\beta_z} (z - z_0 + z') \right], \quad (25)$$

$sn \theta$ - эллиптическая функция Якоби, называемая синусом амплитуды [8].

Определим теперь зависимость полярного угла φ от расстояния ρ из второго уравнения системы (6). Проведя преобразования, аналогичные указанным выше, несложно получить следующее выражение:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\beta_\varphi}{n_0 \tau_1^2 \sqrt{\tau_2 (\gamma - \alpha) \alpha}} [\Pi(u, n, k) - \Pi(u_0, n, k)], \quad (26)$$

где параметр интеграла $n = \frac{\beta - \alpha}{\alpha}$, $\Pi(u, n, k)$ - неполный нормальный эллиптический интеграл в форме Лежандра третьего рода [8], остальные величины определены в (23).

2. Рассмотрим второй интервал $\gamma \leq \xi$. В этом случае для решения уравнения (20) необходимо сделать замену переменных [7]

$$\xi = \frac{\gamma - \beta \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}. \quad (27)$$

При такой замене уравнение (20) приводится к виду (22) с модулем интеграла k , определенным в (23). Однако величины u и u_0 здесь определяются так

$$u_0 = \arcsin \sqrt{\frac{\rho_0^2 - \gamma}{\rho_0^2 - \beta}}$$

$$u = \arcsin \sqrt{\frac{\rho^2 - \gamma}{\rho^2 - \beta}}. \quad (28)$$

Решение уравнения (20) имеет теперь более сложный вид, чем (25):

$$\rho^2 = \frac{\gamma - \beta sn^2 \left[\frac{n_0 \tau_1^2 \sqrt{\tau_2 (\gamma - \alpha)}}{\beta_z} (z - z_0 + z') \right]}{cn^2 \left[\frac{n_0 \tau_1^2 \sqrt{\tau_2 (\gamma - \alpha)}}{\beta_z} (z - z_0 + z') \right]}. \quad (29)$$

Здесь z' имеет такой же вид, как в (24), но u_0 нужно брать из (28), $cn \theta$ - эллиптическая функция Якоби, называемая косинусом амплитуды [8].

Зависимость полярного угла от расстояния от оптической оси определяется из второго уравнения системы (6) при помощи замены (27) и представляет собой комбинацию эллиптических интегралов первого и третьего рода:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\beta_\varphi (n + 1)}{nn_0 \tau_1^2 \sqrt{\tau_2 (\gamma - \alpha) \gamma}} \Pi(u, n, k) - \frac{\beta_\varphi}{nn_0 \tau_1^2 \sqrt{\tau_2 (\gamma - \alpha) \gamma}} F(u, k) + \varphi'$$

В выражении (30) параметр интеграла $n = -\beta/\gamma$, величины u и u_0 определены в (28),

$$\varphi' = -\frac{\beta_\varphi (n + 1)}{nn_0 \tau_1^2 \sqrt{\tau_2 (\gamma - \alpha) \gamma}} \Pi(u_0, n, k) + \frac{\beta_\varphi}{nn_0 \tau_1^2 \sqrt{\tau_2 (\gamma - \alpha) \gamma}} F(u_0, k)$$

Таким образом, если многочлен (17) имеет действительные корни, то решениями системы уравнений (6) являются выражения (25,26) и (29,30).

б) Кубическое уравнение имеет два комплексных корня и один действительный, если $D > 0$ и $p < 0$ или $p > 0$ [9]. Корни приведенного многочлена третьей степени представлены в таблице 1.

Обозначим действительный корень многочлена (17)

$$\xi_1 = \eta_1 \mp \frac{1}{3\tau_2 \tau_1^2} = \alpha.$$

Тогда

$$\xi^3 \pm \frac{1}{\tau_1^2 \tau_2} \xi^2 + \frac{(n_0^2 - \beta_z^2)}{n_0^2 \tau_1^4 \tau_2} \xi - \frac{\beta_\varphi^2}{n_0^2 \tau_1^4 \tau_2} =$$

$$= (\xi - \alpha)(\xi^2 + \chi\xi + \sigma),$$

где $(\xi^2 + \chi\xi + \sigma)$ - трехчлен с вещественными коэффициентами всегда остается положительным при вещественных ξ . Коэффициенты σ и χ можно найти из таб. 1. Интервал $\alpha \leq \xi$ соответствует положительным значениям выражения (17).

Таблица 1

$p < 0$ и $D > 0$	$p > 0$
$R = \frac{(\text{sign}q)\sqrt{ p }}{3}$	$R = \frac{(\text{sign}q)\sqrt{ p }}{3}$
$\text{ch}\Psi = \frac{q}{2R^3}$	$\text{sh}\Psi = \frac{q}{2R^3}$
Действительные корни	
$\eta_1 = -2Rch \frac{\Psi}{3}$	$\eta_1 = -2Rsh \frac{\Psi}{3}$
Мнимые корни	
$\eta_2 = Rch \frac{\Psi}{3} + i\sqrt{3}Rsh \frac{\Psi}{3}$	$\eta_2 = Rsh \frac{\Psi}{3} + i\sqrt{3}Rch \frac{\Psi}{3}$
$\eta_3 = Rch \frac{\Psi}{3} - i\sqrt{3}Rsh \frac{\Psi}{3}$	$\eta_3 = Rsh \frac{\Psi}{3} - i\sqrt{3}Rch \frac{\Psi}{3}$

Чтобы проинтегрировать уравнения (6) введем новую переменную [7] по правилу:

$$\xi = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \chi\alpha + \sigma} \text{tg}^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (32)$$

В результате после преобразований из уравнения (20) получим:

$$\frac{1}{(\alpha^2 + \chi\alpha + \sigma)^{3/4}} \int_{u_0}^u \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2n_0\tau_1^2\sqrt{\tau_2}}{\beta_z} (z - z_0), \quad (33)$$

где

$$k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha + \chi/2}{\sqrt{\alpha^2 + \chi\alpha + \sigma}} \right),$$

$$0 < k^2 < 1$$

$$u_0 = 2 \arcsin \left[\frac{\rho_0^2 - \alpha}{\rho_0^2 - \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \chi\alpha + \sigma}} \right]^{1/2},$$

$$u = 2 \arcsin \left[\frac{\rho^2 - \alpha}{\rho^2 - \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \chi\alpha + \sigma}} \right]^{1/2}. \quad (34)$$

Далее, проинтегрировав уравнение (33), окончательно определим зависимость

$$\rho^2 = \sqrt{(\alpha^2 + \chi\alpha + \sigma)} \text{tg}^2 \left\{ \frac{1}{2} \arcsin \left[\frac{\rho^2 - \alpha}{\rho^2 - \alpha + \sqrt{\alpha^2 + \chi\alpha + \sigma}} \right] \right\} + \alpha,$$

$$\delta = \frac{2n_0\tau_1^2\sqrt{\tau_2}(\alpha^2 + \chi\alpha + \sigma)^{3/4}}{\beta_z}, \quad (35)$$

$$z' = \frac{\beta_z F(u_0, k)}{2n_0\tau_1^2\sqrt{\tau_2}(\alpha^2 + \chi\alpha + \sigma)^{3/4}}.$$

Ввиду громоздкости преобразований при определении зависимости полярного угла φ от ρ , здесь приведен окончательный результат:

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon(1-b)I_1(u) + \varepsilon F(u, k) - \varphi';$$

$$\varepsilon = \frac{\beta_\varphi}{2n_0\tau_1^2\sqrt{\tau_2}(\alpha^2 + \chi\alpha + \sigma)^{3/4} (\alpha - (\alpha^2 + \chi\alpha + \sigma)^{1/2})};$$

$$b = \frac{\alpha + (\alpha^2 + \chi\alpha + \sigma)^{1/2}}{\alpha - (\alpha^2 + \chi\alpha + \sigma)^{1/2}};$$

$$I_1(u) = \frac{b}{b^2 - 1} \Pi \left(u, \frac{b}{b^2 - 1}, k \right) +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{(1-b^2)(k'^2 + b^2k^2)}} \ln \left[\frac{\sqrt{1-b^2}\Delta + k\sqrt{k'^2 + b^2k^2} \sin u}{\sqrt{1-b^2}\Delta - k\sqrt{k'^2 + b^2k^2} \sin u} \right]$$

$$\varphi' = \varepsilon(1-b)I_1(u_0) + \varepsilon F(u_0, k),$$

$$\Delta = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}, \quad (36)$$

$$k'^2 = 1 - k^2.$$

Величины k , u , u_0 определены в (34).

Таким образом, если многочлен (17) имеет два комплексных корня и один действительный, то решением системы уравнений (6) являются выражения (35,36) с учетом (34).

2. Квадрат показателя преломления ограничен ρ^6

Рассмотрим решения системы уравнений (6), если квадрат показателя преломления задан выражением (4).

Сделав замену переменных $\rho^2 = \xi$, уравнения (6) можно переписать так:

$$\frac{d\xi}{dz} = \frac{2n_0\tau_1^3\sqrt{\tau_3}}{\beta_z} (\pm\xi^4 + \frac{\tau_2}{\tau_1^2\tau_3}\xi^3 \pm \frac{1}{\tau_1^4\tau_3}\xi^2 +$$

$$+ \frac{(n_0^2 - \beta_z^2)}{n_0^2\tau_1^6\tau_3}\xi - \frac{\beta_\varphi^2}{n_0^2\tau_1^6\tau_3})^{1/2},$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{\beta_\varphi}{2n_0\tau_1^3\sqrt{\tau_3}\xi} (\pm\xi^4 + \frac{\tau_2}{\tau_1^2\tau_3}\xi^3 \pm \frac{1}{\tau_1^4\tau_3}\xi^2 +$$

$$+ \frac{(n_0^2 - \beta_z^2)}{n_0^2\tau_1^6\tau_3}\xi - \frac{\beta_\varphi^2}{n_0^2\tau_1^6\tau_3})^{-1/2}. \quad (37)$$

Решение системы уравнений (37) зависит от вида корней многочлена четвертой степени. Определим корни ξ_i .

Преобразуем многочлен четвертой степени к приведенному виду. Для этого введем переменную $\eta = \xi \pm \tau_2 / 4 \tau_1^2 \tau_3$ [9]. В результате получим

$$\begin{aligned} & \pm \xi^4 + \frac{\tau_2}{\tau_1^2 \tau_3} \xi^3 \pm \frac{1}{\tau_1^4 \tau_3} \xi^2 + \\ & + \frac{(n_0^2 - \beta_z^2)}{n_0^2 \tau_1^6 \tau_3} \xi - \frac{\beta_\varphi^2}{n_0^2 \tau_1^6 \tau_3} = , \end{aligned} \quad (38)$$

$$= \pm \eta^4 + p \eta^2 + q \eta + r$$

где

$$\begin{aligned} p &= \mp 3 \tau_2^2 \pm 8 \tau_3; \\ q &= \frac{n_0^2 \tau_2^3 - 4 \tau_2 n_0^2 \tau_3 + 8 \tau_3^2 (n_0^2 - \beta_z^2)}{8 n_0^2 \tau_1^6 \tau_3}; \\ r &= \frac{\mp 3 \tau_2^4 n_0^2 \pm 16 \tau_2^2 n_0^2 \tau_3 \mp 64 \tau_2 \tau_3^2 (n_0^2 - \beta_z^2) - 256 \tau_1^2 \tau_3^3 \beta_\varphi^2}{256 n_0^2 \tau_1^8 \tau_3^4}. \end{aligned} \quad (39)$$

Вид решения уравнения $\pm \eta^4 + p \eta^2 + q \eta + r = 0$ зависит от вида решения его кубической резольвенты:

$$z^3 \pm 2pz^2 + (p^2 \mp 4r)z - q^2 - 0. \quad (40)$$

Запишем для (40) приведенное уравнение:

$$\begin{aligned} y^3 + p'y + q' &= 0; \\ p' &= \frac{\mp 12r - p^2}{3}; \\ q' &= \frac{\mp 2p^3 + 72pr - 27q^2}{27}. \end{aligned} \quad (41)$$

Дискриминант приведенного уравнения для кубической резольвенты $D' = (p'/3)^3 + (q'/2)^2$. Если $D' < 0$ и $p' < 0$, корни действительные и имеют вид:

$$\begin{aligned} R &= \frac{(\text{sign } q') \sqrt{|p'|}}{3}, \quad y_1 = -2R \cos \frac{\Psi}{3}, \\ \cos \Psi &= \frac{q'}{2R^3}, \quad y_2 = -2R \cos \left(\frac{\Psi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right), \\ & \quad y_3 = -2R \cos \left(\frac{\Psi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right). \end{aligned} \quad (42)$$

Если $p' < 0$ и $D' > 0$ или $p' > 0$ корни могут быть определены из таб. 1, в которой величины p и q нужно заменить на p' и q' .

$z_i = y_i \mp 2p/3$ - корни кубической резольвенты (40).

Приведенный многочлен четвертой степени в (38) имеет следующие корни [9]:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3})/2; \\ \eta_2 &= (\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3})/2; \\ \eta_3 &= (-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3})/2; \\ \eta_4 &= (-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3})/2. \end{aligned} \quad (43)$$

При этом знаки перед радикалами $\sqrt{z_i}$ выбирают так, чтобы $\sqrt{z_1} \sqrt{z_2} \sqrt{z_3} = -q$.

Если корни уравнения (40) действительны и положительны, то уравнение

$$\pm \eta^4 + p \eta^2 + q \eta + r = 0 \quad (44)$$

имеет 4 действительных корня. Если (40) имеет положительный действительный и два отрицательных действительных корня, то (44) имеет две пары комплексно сопряженных корней. Если (40) имеет один действительный и два комплексно сопряженных корня, то (44) имеет два действительных и два комплексно сопряженных корня.

Для уравнения

$$\pm \xi^4 + \frac{\tau_2}{\tau_1^2 \tau_3} \xi^3 \pm \frac{1}{\tau_1^4 \tau_3} \xi^2 + \frac{(n_0^2 - \beta_z^2)}{n_0^2 \tau_1^6 \tau_3} \xi - \frac{\beta_\varphi^2}{n_0^2 \tau_1^6 \tau_3} = 0 \quad (45)$$

корни определяются так: $\xi_i = \eta_i \mp \tau_2 / 4 \tau_1^2 \tau_3$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

В зависимости от коэффициента при старшем члене, вида корней ξ_i и интервалов, на которых (38) ≥ 0 , в таблице (6) приведены необходимые для решения системы (6) замены переменных [7] и полученные зависимости $\rho^2(z)$ и $\varphi(\rho^2)$.

В таб. 2 используются следующие обозначения. Для случая, когда все корни многочлена (38) вещественны, эти корни обозначены: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, причем предполагается, что $\alpha < \beta < \gamma < \delta$. В случае, когда (38) имеет два вещественных и пару комплексных корней, $\gamma < \delta$ являются вещественными корнями, а комплексные корни заданы выражением $b_0 \pm i c_0$ ($c_0 > 0$). В случае, когда (38) имеет две пары комплексно сопряженных корней, эти корни имеют вид $b_1 \pm i c_1$ ($c_1 > 0$), $b_2 \pm i c_2$ ($c_2 > 0$), $b_1 > b_2$.

Кроме того, в таб. 2 использованы вспомогательные величины:

$$\begin{aligned} \text{tg } \theta_1 &= \frac{\delta - b_0}{c_0}, \text{tg } \theta_2 = \frac{\gamma - b_0}{c_0}; \\ \nu &= \text{tg } \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \text{tg } \frac{\theta_2 + \theta_1}{2}; \\ \text{tg } \theta_3 &= \frac{c_1 + c_2}{b_1 - b_2}, \text{tg } \theta_4 = \frac{c_1 - c_2}{b_1 - b_2}; \\ \text{tg }^2 \frac{\theta_5}{2} &= \frac{\cos \theta_3}{\cos \theta_4} \end{aligned} \quad (46)$$

Вид интеграла $I_1(u)$ определен в (36).

Таблица 2 составлена с учетом работ [7, 8].

Заключение

В выражениях (25, 26), (29, 30), (35, 36) и таб. 2 представлены в аналитическом виде уравнения траекторий лучей, распространяющихся в радиально-градиентной среде с профилем показателя преломления (4). Эти выражения имеют достаточно простой вид и могут быть легко разложены в ряд по заданному параметру.

С учетом формулы (7) полученные выражения дают возможность при любых начальных параметрах определить высоту и наклон луча в произвольной точке траектории.

Зависимости $\rho^2(z)$ и $\varphi(\rho^2)$ для профиля показателя преломления, заданного выражением (4)

Нули (38)	Коефф. при старшем члене	Интервал	Замена переменных	Выражения для $u, u_0, k^2, z', n;$ b, c – вспомогательные величины	$\rho^2(z), \varphi(\rho^2)$
Четыре вещественных.	+1	$\xi \leq \alpha$ или $\delta \leq \xi$	$\xi = \frac{\delta(\gamma - \alpha) - \gamma(\delta - \alpha)\sin^2 \varphi}{(\gamma - \alpha) - (\delta - \alpha)\sin^2 \varphi}$	$u_0 = \arcsin \sqrt{\frac{(\rho_0^2 - \delta)(\gamma - \alpha)}{(\rho_0^2 - \gamma)(\delta - \alpha)}}$ $u = \arcsin \sqrt{\frac{(\rho^2 - \delta)(\gamma - \alpha)}{(\rho^2 - \gamma)(\delta - \alpha)}}$ $z' = \frac{\beta_z}{n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}} F(u_0, k)$ $k^2 = \frac{(\delta - \alpha)(\gamma - \beta)}{(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}$ $n = \frac{\gamma(\alpha - \delta)}{\delta(\gamma - \alpha)}$	$\rho^2 = \frac{\delta(\gamma - \alpha) - \gamma(\delta - \alpha)sn^2 \left[\frac{n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}}{\beta_z} (z - z_0 + z') \right]}{(\gamma - \alpha) - (\delta - \alpha)sn^2 \left[\frac{n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}}{\beta_z} (z - z_0 + z') \right]}$ $\varphi = \varphi_0 + \frac{\beta_\varphi(\gamma - \delta)}{n_0 \tau_1^3 \delta \gamma \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}} \Pi(u, n, k) +$ $+ \frac{\beta_\varphi}{n_0 \tau_1^3 \gamma \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}} F(u, k) - \varphi'$ $\varphi' = \frac{\beta_\varphi(\gamma - \delta)}{n_0 \tau_1^3 \delta \gamma \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}} \Pi(u_0, n, k) +$ $+ \frac{\beta_\varphi}{n_0 \tau_1^3 \gamma \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}} F(u_0, k)$
		$\beta \leq \xi \leq \gamma$	$\xi = \frac{\beta(\gamma - \alpha) - \alpha(\gamma - \beta)\sin^2 \varphi}{(\gamma - \alpha) - (\gamma - \beta)\sin^2 \varphi}$	$u_0 = \arcsin \sqrt{\frac{(\rho_0^2 - \beta)(\gamma - \alpha)}{(\rho_0^2 - \alpha)(\gamma - \beta)}}$ $u = \arcsin \sqrt{\frac{(\rho^2 - \beta)(\gamma - \alpha)}{(\rho^2 - \alpha)(\gamma - \beta)}}$ $z' = \frac{\beta_z}{n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}} F(u_0, k)$ $k^2 = \frac{(\delta - \alpha)(\gamma - \beta)}{(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}$ $n = \frac{\alpha(\beta - \gamma)}{\beta(\gamma - \alpha)}$	$\rho^2 = \frac{\beta(\gamma - \alpha) - \alpha(\gamma - \beta)sn^2 \left[\frac{n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}}{\beta_z} (z - z_0 + z') \right]}{(\gamma - \alpha) - (\gamma - \beta)sn^2 \left[\frac{n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}}{\beta_z} (z - z_0 + z') \right]}$ $\varphi = \varphi_0 + \frac{\beta_\varphi(\alpha - \beta)}{n_0 \tau_1^3 \alpha \beta \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}} \Pi(u, n, k) +$ $+ \frac{\beta_\varphi}{n_0 \tau_1^3 \alpha \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}} F(u, k) - \varphi'$ $\varphi' = \frac{\beta_\varphi(\alpha - \beta)}{n_0 \tau_1^3 \alpha \beta \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}} \Pi(u_0, n, k) +$ $+ \frac{\beta_\varphi}{n_0 \tau_1^3 \alpha \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}} F(u_0, k)$

	-1	$\alpha \leq \xi \leq \beta$	$\xi = \frac{\alpha(\delta - \beta) + \delta(\beta - \alpha)\sin^2 \varphi}{(\delta - \beta) + (\beta - \alpha)\sin^2 \varphi}$	$u_0 = \arcsin \sqrt{\frac{(\rho_0^2 - \alpha)(\delta - \beta)}{(\delta - \rho_0^2)(\beta - \alpha)}}$ $u = \arcsin \sqrt{\frac{(\rho^2 - \alpha)(\delta - \beta)}{(\delta - \rho^2)(\beta - \alpha)}}$ $z' = \frac{\beta_z}{n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}} F(u_0, k)$ $k^2 = \frac{(\beta - \alpha)(\delta - \gamma)}{(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}$ $n = \frac{\delta(\beta - \alpha)}{\alpha(\delta - \beta)}$	$\rho^2 = \frac{\alpha(\delta - \beta) + \delta(\beta - \alpha)sn^2 \left[\frac{n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}}{\beta_z} (z - z_0 + z') \right]}{(\delta - \beta) - (\beta - \alpha)sn^2 \left[\frac{n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}}{\beta_z} (z - z_0 + z') \right]}$ $\varphi = \varphi_0 + \frac{\beta_\varphi(\delta - \alpha)}{n_0 \tau_1^3 \alpha \delta \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}} \Pi(u, n, k) +$ $+ \frac{\beta_\varphi}{n_0 \tau_1^3 \delta \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}} F(u, k) - \varphi'$ $\varphi' = \frac{\beta_\varphi(\delta - \alpha)}{n_0 \tau_1^3 \alpha \delta \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}} \Pi(u_0, n, k) +$ $+ \frac{\beta_\varphi}{n_0 \tau_1^3 \delta \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}} F(u_0, k)$
		$\gamma \leq \xi \leq \delta$	$\xi = \frac{\gamma(\delta - \beta) - \beta(\delta - \gamma)\sin^2 \varphi}{(\delta - \beta) - (\delta - \gamma)\sin^2 \varphi}$	$u_0 = \arcsin \sqrt{\frac{(\rho_0^2 - \gamma)(\delta - \beta)}{(\rho_0^2 - \beta)(\delta - \gamma)}}$ $u = \arcsin \sqrt{\frac{(\rho^2 - \gamma)(\delta - \beta)}{(\rho^2 - \beta)(\delta - \gamma)}}$ $z' = \frac{\beta_z}{n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}} F(u_0, k)$ $k^2 = \frac{(\beta - \alpha)(\delta - \gamma)}{(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}$ $n = \frac{\beta(\gamma - \delta)}{\gamma(\delta - \beta)}$	$\rho^2 = \frac{\gamma(\delta - \beta) - \beta(\delta - \gamma)sn^2 \left[\frac{n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}}{\beta_z} (z - z_0 + z') \right]}{(\delta - \beta) - (\delta - \gamma)sn^2 \left[\frac{n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}}{\beta_z} (z - z_0 + z') \right]}$ $\varphi = \varphi_0 + \frac{\beta_\varphi(\beta - \gamma)}{n_0 \tau_1^3 \gamma \beta \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}} \Pi(u, n, k) +$ $+ \frac{\beta_\varphi}{n_0 \tau_1^3 \beta \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}} F(u, k) - \varphi'$ $\varphi' = \frac{\beta_\varphi(\beta - \gamma)}{n_0 \tau_1^3 \gamma \beta \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}} \Pi(u_0, n, k) +$ $+ \frac{\beta_\varphi}{n_0 \tau_1^3 \beta \sqrt{\tau_3(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)}} F(u_0, k)$

Два вещественных и два комплексных	+1	$\delta \leq \xi$ или $\xi \leq \gamma$	$\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{\cos \theta_1 (\delta - \xi)}{\cos \theta_2 (\xi - \gamma)},$ $\xi = \frac{\delta + \gamma}{2} - \frac{\delta - \gamma}{2} \frac{\nu - \cos \varphi}{1 - \nu \cos \varphi},$	$\theta_1 - \text{острый},$ $\theta_2 - \text{тупой},$ $u_0 = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\cos \theta_1 (\delta - \rho_0^2)}{\cos \theta_2 (\rho_0^2 - \gamma)}},$ $u = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\cos \theta_1 (\delta - \rho^2)}{\cos \theta_2 (\rho^2 - \gamma)}},$ $z' = \frac{\beta_z (-\cos \theta_1 \cos \theta_2)^{1/2}}{2c_0 n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3}} F(u_0, k),$ $k^2 = \sin^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2},$ $b = \frac{(\delta + \gamma) - (\delta - \gamma)\nu}{(\delta - \gamma) - (\delta + \gamma)\nu}.$	$\rho^2 = \frac{\delta - \gamma \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \operatorname{tg}^2 \left[\frac{1}{2} \operatorname{am} \left(\frac{2c_0 n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3}}{\beta_z (-\cos \theta_1 \cos \theta_2)^{1/2}} (z - z_0 + z') \right) \right]}{1 + \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \operatorname{tg}^2 \left[\frac{1}{2} \operatorname{am} \left(\frac{2c_0 n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3}}{\beta_z (-\cos \theta_1 \cos \theta_2)^{1/2}} (z - z_0 + z') \right) \right]}$ $\varphi = \varphi_0 + \frac{\beta_\varphi (-\cos \theta_1 \cos \theta_2)^{1/2} (1 + b\nu)}{c_0 n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3} [(\delta - \gamma) - \nu(\delta + \gamma)]} I_1(u) -$ $- \frac{\beta_\varphi (-\cos \theta_1 \cos \theta_2)^{1/2} \nu}{c_0 n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3} [(\delta - \gamma) - \nu(\delta + \gamma)]} F(u, k)$ $\varphi' = + \frac{\beta_\varphi (-\cos \theta_1 \cos \theta_2)^{1/2} (1 + b\nu)}{c_0 n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3} [(\delta - \gamma) - \nu(\delta + \gamma)]} I_1(u_0) -$ $- \frac{\beta_\varphi (-\cos \theta_1 \cos \theta_2)^{1/2} \nu}{c_0 n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3} [(\delta - \gamma) - \nu(\delta + \gamma)]} F(u_0, k)$
	-1	$\gamma \leq \xi \leq \delta$		$\theta_1, \theta_2 - \text{острые}.$	Вид решения такой же, как в случае $\delta \leq \xi$ или $\xi \leq \gamma$, с учетом замены множителя $\frac{(-\cos \theta_1 \cos \theta_2)^{1/2}}{c_0}$ на множитель $-\frac{(\cos \theta_1 \cos \theta_2)^{1/2}}{c_0}$.
Четыре комплексных, $b_1 > b_2$	1	$-\infty \leq \xi \leq \infty$	$\xi = b_1 + c_1 \operatorname{tg} \left(\varphi + \frac{\theta_3 + \theta_4}{2} \right)$	$\theta_3, \theta_4, \theta_5 / 2 - \text{острые}.$ $u_0 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\rho_0^2 - b_1}{c_1} \right) - \frac{\theta_3 + \theta_4}{2},$ $u = \operatorname{arctg} \left(\frac{\rho^2 - b_1}{c_1} \right) - \frac{\theta_3 + \theta_4}{2},$ $z' = \frac{\beta_z (\cos \theta_5)^{1/2}}{2n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3} (c_1 c_2)^{1/2}} F(u_0, k)$ $k^2 = \sin^2 \theta_5$ $c = \frac{b_1 + c_1 \operatorname{tg} \frac{\theta_3 + \theta_4}{2}}{c_1 - b_1 \operatorname{tg} \frac{\theta_3 + \theta_4}{2}}.$	$\rho^2 = b_1 + c_1 \operatorname{tg} \left\{ \operatorname{am} \left[\frac{2n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3}}{\beta_z} \left(\frac{c_1 c_2}{\cos \theta_5} \right)^{1/2} (z - z_0 + z') \right] + \frac{\theta_3 + \theta_4}{2} \right\}$ $\varphi = \varphi_0 + \frac{\beta_\varphi \left(\frac{\cos \theta_5}{c_1 c_2} \right)^{1/2} \left(1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\theta_3 + \theta_4}{2} \right) c \right)}{2n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3} \left(\frac{\cos \theta_5}{c_1 c_2} \right)^{1/2} \frac{\theta_3 + \theta_4}{2}} I^{*2}(u) -$ $- \frac{\beta_\varphi \left(\frac{\cos \theta_5}{c_1 c_2} \right)^{1/2} \operatorname{tg} \left(\frac{\theta_3 + \theta_4}{2} \right)}{2n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3} \left(\frac{\cos \theta_5}{c_1 c_2} \right)^{1/2} \frac{\theta_3 + \theta_4}{2}} F(u, k) - \varphi'.$

<p>Четыре комплексных, $b_1 = b_2$ $c_1 > c_2$</p>			$\xi = b_1 - c_1 \operatorname{ctg} \varphi.$	$u_0 = \operatorname{arctg} \frac{c_1}{b_1 - \rho_0^2},$ $u = \operatorname{arctg} \frac{c_1}{b_1 - \rho^2},$ $z' = \frac{\beta_z}{2\tau_1^3 n_0 \sqrt{\tau_3} c_1} F(u_0, k)$ $k^2 = 1 - \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2, \quad c = -\frac{c_1}{b_1}.$	$\rho^2 = b_1 - c_1 \operatorname{ctg} \left\{ \operatorname{am} \left[\frac{2n_0 \tau_1^3 \sqrt{\tau_3} c_1}{\beta_z} (z - z_0 + z') \right] \right\},$ $\varphi = \varphi_0 + \frac{\beta_\varphi}{2\tau_1^3 n_0 \sqrt{\tau_3} c_1 b_1} F(u, k) - \frac{\beta_\varphi c}{2\tau_1^3 n_0 \sqrt{\tau_3} c_1 b_1} I_2(u) - \varphi',$ $\varphi' = \frac{\beta_\varphi}{2\tau_1^3 n_0 \sqrt{\tau_3} c_1 b_1} F(u_0, k) - \frac{\beta_\varphi c}{2\tau_1^3 n_0 \sqrt{\tau_3} c_1 b_1} I_2(u_0).$
---	--	--	---	--	---

$$*) I_2(u) = \frac{c}{1+c^2} F(u, k) + \frac{1}{c(c^2+1)} \Pi\left(u, -\frac{1+c^2}{c^2}, k\right) - \frac{1}{2\sqrt{(1+c^2)(1+c^2k'^2)}} \ln \left[\frac{\sqrt{1+c^2k'^2} + \sqrt{1+c^2}\Delta}{\sqrt{1+c^2k'^2} - \sqrt{1+c^2}\Delta} \right]$$

k', Δ - определены в (36).

Литература

1. Грейсх Г.И., Ефименко И.М., Степанов С.А. Оптика градиентных и дифракционных элементов. М.: Радио и связь, 1990. – 136 с.
2. F. Bociort, J. Kross New ray – tracing method for gradient – index lenses // Proceedings SPIE. 1993. Vol. 1780, p. 216-225.
3. E.W. Marchand Fifth-order analysis of GRIN lenses // Applied Optics. 1985. Vol. 24, № 24, p. 4371-4374.
4. E.W. Marchand Rapid ray tracing in radial gradients // Applied Optics. 1988.- Vol. 27, № 3, p. 465-467.
5. Грейсх Г.И., Степанов С.А. Расчет хода псевдолучей через оптические системы, включающие градиентные и дифракционные линзы // Опт. и спектр. 1996. Т. 81, №4. с. 698-701
6. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов // М.: Мир, 1984. 512 с.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье // М.: Наука, 1967. 299 с.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений // М.: Наука, 1971. 1108 с.
9. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике // Совм. изд-во: Лепциг «Гойбнер», М.: Наука, 1981. 718 с.