

# ОПТИМИЗАЦИЯ ДОЭ, ФОКУСИРУЮЩЕГО ГАУССОВ ПУЧОК В ПРЯМОУГОЛЬНУЮ ФОКАЛЬНУЮ ОБЛАСТЬ

В.С. Павельев

*Институт систем обработки изображений РАН  
Самарский государственный аэрокосмический университет*

## Аннотация

Данная работа посвящена применению известной генетической итерационной процедуры нахождения экстремума функции многих переменных к расчету квантованного ДОЭ, фокусирующего Гауссов пучок в прямоугольник.

## Введение

В [1] показано, что возможность сведения вычисления двумерного оператора распространения света к вычислению одномерного в радиально-симметричном случае позволяет успешно применять стохастические методы к оптимизации квантованной фазы радиально-симметричных ДОЭ (дифракционных оптических элементов).

Если фазовая функция элемента  $\varphi(u, v)$  и амплитуда в сечении освещающего пучка  $I_0(u, v) = \sqrt{I_0(u, v)}$  допускают разделение по переменным, т.е.

$$\begin{cases} \varphi(u, v) = \varphi_1(u) + \varphi_2(v) \\ A_0(u, v) = A_1(u)A_2(v) \end{cases} \quad (1)$$

вычисление двумерного оператора сводится к вычислению двух одномерных и, таким образом, для оптимизации фазовой функции в этом случае также целесообразно использовать стохастические методы. Данная работа посвящена применению такого подхода к расчету квантованного ДОЭ, фокусирующего гауссов пучок в прямоугольную фокальную область. Актуальность такой задачи объясняется широким спектром потенциальных приложений [2], а также тем, что значительное количество технологий изготовления ДОЭ связано с квантованием его фазовой функции [3] и уменьшение числа уровней квантования значительно удешевляет процесс изготовления.

## Постановка задачи

Рассмотрим задачу фокусировки пучка с распределением интенсивности в сечении

$$\begin{aligned} I_0(u, v) &= \exp(-2(u^2 + v^2)/\sigma^2) = \\ &= \exp(-2u^2/\sigma^2) \exp(-2v^2/\sigma^2) \end{aligned}$$

в прямоугольник с фокальными размерами сторон  $2a$  и  $2b$  с помощью ДОЭ с фазовой функцией  $\varphi(u, v)$ , определенной на апертуре  $D$  размером  $2A \times 2A$  (рис. 1).

Определим заданную фокальную интенсивность следующим образом:

$$I = I_x \cdot I_y, \quad (2)$$

где

$$I_x = \begin{cases} C_x, & -a \leq x \leq a \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

$$I_y = \begin{cases} C_y, & -b \leq y \leq b \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (3)$$

$C_x, C_y$  – константы, выбираемые из соображений сохранения энергии:

$$C_x = \frac{1}{2a} \int_{-A}^A \exp(-2u^2/\sigma^2) du, \quad (4)$$

$$C_y = \frac{1}{2b} \int_{-A}^A \exp(-2v^2/\sigma^2) dv. \quad (5)$$

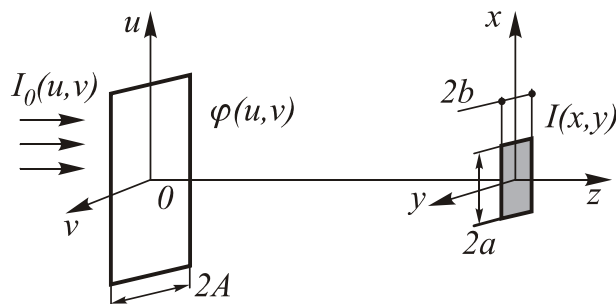


Рис. 1. Постановка задачи фокусировки гауссова пучка в прямоугольную фокальную область

В случае, если ДОЭ с фазовой функцией  $\varphi(u, v)$  помещен в заднюю плоскость Фурье-каскада с фокусным расстоянием линзы  $f$ , сформированная интенсивность  $\tilde{I}(x, y)$  в выходной плоскости может быть найдена следующим образом [4]:

$$\begin{aligned} \tilde{I}(x, y) &= \left| \frac{ik}{2\pi f} \iint_D \exp(-(u^2 + v^2)/\sigma^2) \exp(i\varphi(u, v)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp(-ik(xu + yv)/f) dudv \right|^2. \end{aligned} \quad (6)$$

В случае расчета ДОЭ, включающего в себя линзу:

$$\begin{aligned} \tilde{I}(x, y) &= \left| \frac{ik}{2\pi f} \iint_D \exp(-(u^2 + v^2)/\sigma^2) \exp(i\varphi(u, v)) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp(ik(u^2 + v^2)/2f - ik(xu + yv)/f) dudv \right|^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая (1), можно переписать формулу (7) в следующем виде:

$$\tilde{I}(x, y) = \tilde{I}_x(x) \cdot \tilde{I}_y(y), \quad (8)$$

где

$$\tilde{I}_x(x) = \left| \sqrt{ik/2\pi f} \int_{-A}^A \exp(-u^2/\sigma^2) \times \right. \\ \left. \times \exp(i\varphi_l(u)) \exp(iku^2/2f - ikxu/f) du \right|^2, \quad (9)$$

$$\tilde{I}_y(y) = \left| \sqrt{ik/2\pi f} \int_{-A}^A \exp(-v^2/\sigma^2) \times \right. \\ \left. \times \exp(i\varphi_2(v)) \exp(ikv^2/2f - ikyv/f) dv \right|^2. \quad (10)$$

В этом случае функционал

$$\Phi(\varphi(u, v)) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a |\tilde{I}_x(x, \varphi_1(u)) - C_x| dx + \\ + \frac{1}{2b} \int_{-b}^b |\tilde{I}_y(y, \varphi_2(v)) - C_y| dy \quad (11)$$

характеризует качество формирования заданного распределения интенсивности с помощью ДОЭ с фазовой функцией  $\varphi(u, v) = \varphi_1(u) + \varphi_2(v)$ .

#### Построение процедуры оптимизации квантованной фазовой функции ДОЭ

Перейдя к дискретной модели с числом элементов дискретизации в плоскости ДОЭ  $N \times N$  и шагом дискретизации в фокальной плоскости, равным размеру дифракционного пятна  $\Delta_f = \lambda f / (2A)$ , можем заменить (11) функционалом

$$\bar{\Phi}(\varphi) = \frac{1}{N_x} \sum_{n=0}^{N_x-1} |\tilde{I}_x(x_n, \varphi_1(u)) - C_x| + \\ + \frac{1}{N_y} \sum_{m=0}^{N_y-1} |\tilde{I}_y(y_m, \varphi_2(v)) - C_y|, \quad (12)$$

где  $N_x = 2a/\Delta_f$ ,  $x_n = -a + n\Delta_f$ ,  $y_m = -b + m\Delta_f$ ,  $N_y = 2b/\Delta_f$ .

$$\tilde{I}_x(x_n) = \left| \sum_{p=0}^{N-1} C_p^n \exp(i\varphi_l(u_p)) \right|^2, \quad (13)$$

$$\tilde{I}_y(y_m) = \left| \sum_{q=0}^{N-1} C_q^m \exp(i\varphi_2(v_q)) \right|^2, \quad (14)$$

$$u_p = -A + p\Delta, \quad v_q = -A + q\Delta,$$

$$C_p^n = \int_{u_p}^{u_{p+1}} \sqrt{ik/2\pi f} \exp(-u^2/\sigma^2) \times \\ \times \exp(-ikx_n u/f + iku^2/2f) du, \quad (15)$$

$$C_q^m = \int_{v_q}^{v_{q+1}} \sqrt{ik/2\pi f} \exp(-v^2/\sigma^2) \times \\ \times \exp(-iky_m v/f + ikv^2/2f) dv, \quad (16)$$

$\Delta = 2A/N$ . Отметим, что коэффициенты  $C_p^n, C_q^m$  не зависят от выбора фазовых функций  $\varphi_1, \varphi_2$  и могут быть посчитаны до начала работы оптимизационной процедуры, впрочем, также как и коэффициенты  $C_x, C_y$ .

Для минимизации функционала (12) в данной работе использовалась модификация известной итерационной генетической процедуры [1, 5].

Перед началом работы итерационной процедуры формировалась начальная популяция, представлявшая собой набор  $N_{gen}$  сгенерированных случайным образом массивов

$$\{\varphi_j\}_{j=0}^{2N-1}, \quad \varphi_j \in \{(2\pi m/M) : m \in [1, M]\}. \quad (17)$$

Каждый массив содержал последовательно записанные отсчеты функций  $\varphi_1(u)$  и  $\varphi_2(v)$ :

$$\varphi_j = \begin{cases} \varphi_1(-A + j\Delta) & j < N \\ \varphi_2(-A + (j-N)\Delta) & j \geq N \end{cases} \quad (18)$$

Для увеличения скорости сходимости в начальную популяцию вводилось в качестве начального приближения (т.е. одного из «индивидов» нулевой популяции) геометрическое решение задачи фокусировки гауссова пучка в прямоугольнике, квантованное по  $M$  уровням. Такое решение представляет собой суперпозицию двух одномерных фокусаторов в отрезки с длинами  $2a$  и  $2b$ :

$$\tilde{\varphi}(u, v) = \tilde{\varphi}_1(u) + \tilde{\varphi}_2(v). \quad (19)$$

Далее, в цикле последовательно выполняются следующие операции:

- *скрещивание* – формирование  $N_{child}$  дополнительных новых индивидов-массивов, значение каждого отсчета которых выбирается как значение соответствующего отсчета случайно выбранного массива-«родителя»;

- *мутация* – стохастическое изменение значений случайно выбранных отсчетов, получившихся новых массивов. Выбор вероятности мутации определяет скорость сходимости алгоритма;

- *селекция* – определение следующей популяции «родителей» путем выбора  $N_{gen}$  лучших (в смысле решаемой задачи) индивидов с помощью вычисления целевых функций для всех индивидов.

Для улучшения сходимости генетическая процедура совмещалась с применением метода вариаций на каждой итерации.

После завершения итерационной процедуры, следующие критерии были выбраны для оценки качества фокусировки: энергетическая эффективность

$$e = \sum_{n=0}^{N_x-1} \sum_{m=0}^{N_y-1} \tilde{I}_x(x_n) \tilde{I}_y(y_m) / \sum_{n=0}^{N_x-1} \sum_{m=0}^{N_y-1} C_x C_y, \quad (20)$$

и среднеквадратичное отклонение сформированной интенсивности от среднего значения  $\bar{I}$

$$\delta = \left( \sum_{n=0}^{N_x-1} \sum_{m=0}^{N_y-1} [\tilde{I}_x(x_n) \tilde{I}_y(y_m) - \bar{I}]^2 \right)^{1/2} \cdot \left( \sum_{n=0}^{N_x-1} \sum_{m=0}^{N_y-1} [\tilde{I}_x(x_n) \tilde{I}_y(y_m)]^2 \right)^{-1/2}, \quad (21)$$

$$\bar{I} = \sum_{n=0}^{N_x-1} \sum_{m=0}^{N_y-1} \tilde{I}_x(x_n) \tilde{I}_y(y_m) / N_x N_y. \quad (22)$$

### Результаты вычислительного эксперимента

Для постановки вычислительного эксперимента выбирались следующие параметры: длина волны освещающего пучка  $\lambda=10,6$  мкм, радиус освещающего пучка  $\sigma=1,85$  мм, фокусное расстояние  $f=100$  мм, размер апертуры  $2*A=6,4$  мм, размер фокальной области  $2a*2b=1,75*3,5$  мм, число отсчетов фазовой функции на апертуре элемента  $N*N=100*100$ , число уровней квантования  $M=8$ , количество итераций стохастической процедуры  $N_{it}=100$ , число индивидов исходной популяции  $N_{gen}=20$ , число индивидов, образованных операцией скрещивания  $N_{child}=20$ .

Уменьшение значения функционала невязки с ходом итераций показано на рис. 2.

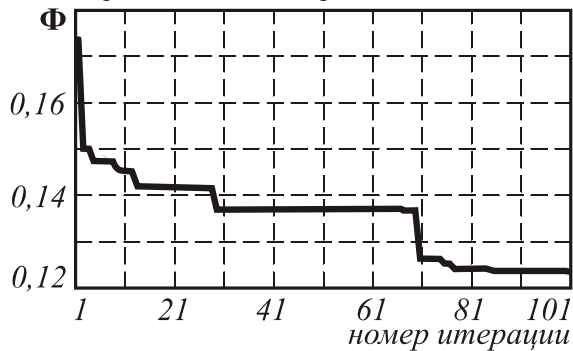


Рис. 2 Зависимость значения невязки от номера итерации

На рис. 3 представлены итерационно рассчитанная фаза ДОЭ (а) и интенсивность в фокальной плоскости элемента: (б) – результат численного моделирования итерационно рассчитанного ДОЭ, (в) – фаза геометрического приближения, (г) – результат численного моделирования геометрического приближения.

Значения расчетной энергетической эффективности (20) и среднеквадратичного отклонения интенсивности (21), полученные в ходе вычислительного эксперимента для квантованного геометрического приближения и итерационно найденного решения, приведены в таб. 1.

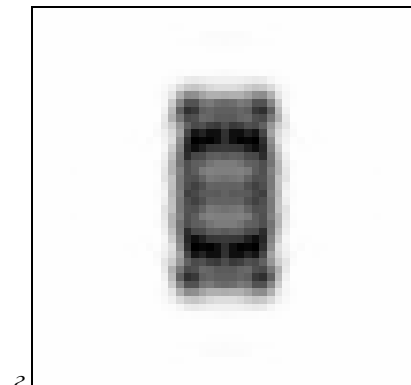
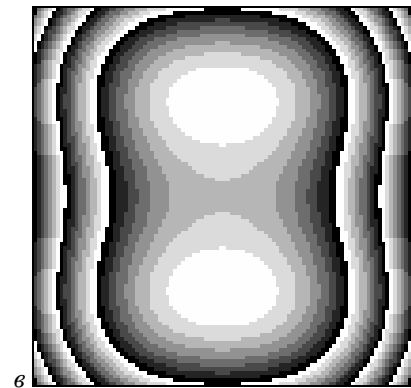
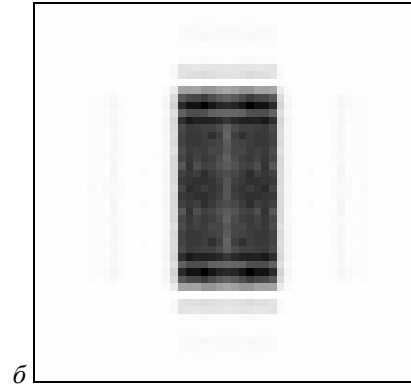
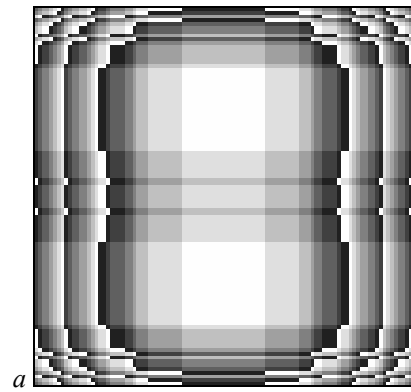


Рис. 3. Итерационно рассчитанная фаза ДОЭ (а), (б) – распределение интенсивности, сформированное итерационно рассчитанным ДОЭ в фокальной плоскости (результат численного моделирования), (в) – фаза геометрического приближения, (г) – распределение интенсивности, сформированное геометрическим приближением

Таблица 1

Метод расчета	$\epsilon, \%$	$\delta, \%$
Геометрооптический	87	45
Итерационный	88	13

Таким образом, применение стохастической итерационной процедуры с функционалом (12) позволяет рассчитывать восьмиуровневые ДОЭ, фокусирующие гауссов пучок в прямоугольник с энергетической эффективностью, близкой к эффективности геометрического решения, и более чем в 3 раза меньшим значением среднеквадратичного отклонения для выбранного набора физических параметров. Отметим также небольшие вычислительные затраты, требуемые для реализации расчета элемента, что объясняется простотой вычисления функционала (12) после того, как значения коэффициентов (15) предварительно посчитаны.

### Заключение

В данной работе рассмотрено применение известной генетической итерационной процедуры нахождения экстремума функции многих переменных к расчету квантованного ДОЭ, предназначенного для фокусировки гауссова пучка в прямоугольник.

Приведенные результаты вычислительных экспериментов подтверждают перспективность рассматриваемого подхода.

### Благодарности

Автор выражает благодарность С.Г. Волотовскому за помощь в постановке вычислительного эксперимента.

### Литература

1. Павельев В.С. К расчету квантованных радиально-симметричных ДОЭ // *Компьютерная оптика*, 2001. №22 (принято к публикации).
2. M. Duparre', M.A. Golub, B. Luedge, V.S. Pavelyev, V.A. Soifer, G.V. Uspleniev, S.G. Volotovskii Investigation of computer-generated diffractive beam shapers for flattening of single-modal CO<sub>2</sub>-laser beams // *Applied Optics*, 1995, v. 34, N 14, p. 2489-2497.
3. A.V. Volkov, N.L. Kazansky, V.S. Pavelyev, V.A. Soifer, G.V. Uspleniev Methods For Computer Design Of Diffractive Optical Elements // Chapter 4. Technology of DOE fabrication. In Victor A. Soifer (Ed.): A Wiley Interscience Publication. John Wiley&Sons, Inc., New York, 2002, p. 267-345.
4. V.A. Soifer Methods For Computer Design Of Diffractive Optical Elements // Chapter 1. Introduction to Diffractive Optics. In Victor A. Soifer (Ed.): A Wiley Interscience Publication. John Wiley&Sons, Inc., New York, 2002, p. 1-54.
5. C.Y. Lu, H.Z. Liao, C.K. Lee, J.S. Wang Energy control by linking individual patterns to self-repeating diffractive optical elements // *Applied Optics*, **36**, 1997, N.20, p. 4702-4712.