

## Орбитальный угловой момент суперпозиций оптических вихрей после прохождения через секторную диафрагму

А.А. Ковалёв<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151;

<sup>2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

### Аннотация

В оптических коммуникациях желательно знать величины, описывающие световое поле, которые сохраняются при распространении в пространстве и обладают сопротивлением к некоторым искажениям. Как правило, оптические вихревые пучки характеризуются орбитальным угловым моментом и/или топологическим зарядом. В данной работе исследуется, что происходит с орбитальным угловым моментом суперпозиции двух или нескольких оптических вихрей (с разным топологическим зарядом), когда она искажается секторной диафрагмой. Обнаружено несколько случаев, когда искажение пучка не нарушает общий орбитальный угловой момент всей суперпозиции. Первый случай – это когда освещающий пучок состоит из двух вихрей одинаковой мощности. Второй случай – когда полуугол секторной апертуры равен целому числу, умноженному на  $\pi$  и делённому на разность топологических зарядов. Для более чем двух освещающих пучков этот угол равен целому числу, умноженному на  $\pi$  и делённому на наибольший общий делитель всех возможных разностей топологических зарядов. Для двух освещающих вихревых пучков с вещественной радиальной составляющей комплексной амплитуды орбитальный угловой момент также сохраняется, если между пучками есть разность фаз  $\pm\pi/2$ . Также показано, что общий орбитальный угловой момент сохраняется при прохождении двух пучков одинаковой мощности через бинарную радиальную решётку.

**Ключевые слова:** секторная диафрагма, орбитальный угловой момент, оптический вихрь, суперпозиция.

**Цитирование:** Ковалёв, А.А. Орбитальный угловой момент суперпозиций оптических вихрей после прохождения через секторную диафрагму / А.А. Ковалёв // Компьютерная оптика. – 2022. – Т. 46, № 2. – С. 196-203. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1072.

**Citation:** Kovalev AA. Orbital angular momentum of superpositions of optical vortices after passing through a sector diaphragm. Computer Optics 2022; 46(2): 196-203. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1072.

### Введение

Одним из важных свойств некоторых структурированных световых пучков является их способность к восстановлению после прохождения через препятствия. Интерес к этому явлению продолжается от основополагающей работы [1] до наших дней. Среди недавних работ можно упомянуть, например, [2–4]. Так, в [2] изучается модовый состав светового поля в качестве предсказателя или индикатора способности к самовосстановлению. Было показано, что сходство между модовыми спектрами искажённого и неискажённого пучка позволяет оценить, насколько вероятно пучок сможет восстановиться после произвольного препятствия. В качестве примера экспериментально продемонстрировано, что пучки Лагерра–Гаусса обладают лучшей способностью к самовосстановлению по сравнению с пучками Бесселя–Гаусса. В [3] анализируется самовосстановление частично искажённого пучка путём представления его в виде двух ортогональных компонент – затухающей копии неискажённого пучка и самого искажающего поля. Обна-

ружено, что предельное самовосстановление возникает в дальней зоне и что определённые относительно слабые фазовые искажения могут полностью разрушить пучок. В [4] рассматривается возможность формирования вихревого пучка неполными голограммами, имитирующими цифровой микрзеркальный модулятор со случайными битыми пикселями. Обнаружено, что такие искажённые пучки менее мощны, но сохраняют поперечное распределение интенсивности и их топологический заряд не нарушается.

При изучении способности различных пучков к сопротивлению возмущениям можно рассматривать два противоположных случая. В первом случае размер препятствия мал по сравнению с шириной пучка. В другом случае, наоборот, остаётся только небольшая часть поперечного сечения исходного пучка. Второй случай не обязательно означает, что пучок физически искажён большим препятствием. Схожая задача возникает, если требуется установить свойства пучка по небольшой части его поперечного сечения. Например, при распространении в пространстве пучки с большим топологическим зарядом расходятся

сильнее и регистрация всего светового кольца становится непрактичной и требует больших затрат на приёмную аппаратуру. Работа [5] как раз посвящена демультимплексированию пучков по их орбитальному угловому моменту (ОУМ) путём анализа света только по части апертуры. Как частный случай этой задачи ранее изучалось ОУМ-демультимплексирование с помощью угловой частичной приёмной апертуры [6], имеющей форму усечённого сектора (сектор большего радиуса минус сектор меньшего радиуса). Работа А.В. Воляра и др. [7] посвящена влиянию секторной диафрагмы на световой пучок. В работе [7] теоретически и экспериментально изучаются секторные возмущения вихревых пучков, измерены преобразования спектра вихрей, ОУМ и информационной энтропии возмущённого пучка. Показано, что секторные возмущения не влияют на ОУМ пучков Лагерра–Гаусса (как при больших, так и при малых углах сектора), но ОУМ быстро снижается при очень малых углах сектора, когда принцип неопределённости между ОУМ и углом сектора вносит существенный вклад. Также показано, что при относительно слабых угловых секторных возмущениях информационная энтропия быстро падает из-за рождения новых оптических вихрей, вызванных дифракцией на краях диафрагмы. Однако освещающий пучок в [7] состоял из одиночного радиально симметричного оптического вихря. В недавней работе [8] исследуется влияние секторной диафрагмы на спиральный вихревой пучок света, в частности с треугольным сечением. Такой пучок не меняет свою форму при распространении. Он является бесконечной суперпозицией мод Лагерра–Гаусса со специально подобранными коэффициентами. Показано, что диафрагма переводит его в новое устойчивое состояние, а на месте возмущённой области пучка формируется характерный узор топологических диполей, который следует за пучком без изменений при распространении. Насколько нам известно, ранее не изучалось, как секторная диафрагма воздействует на ОУМ суперпозиции конечного числа оптических вихрей с произвольными коэффициентами. Есть теоретическая работа, в которой аналитически исследуется дифракция светового поля на секторной диафрагме в зоне Френеля [9], но ОУМ в этой работе не рассматривался.

В данной работе исследуется, что происходит с ОУМ пучка, когда вместо одного радиально симметричного вихря через секторную апертуру проходит суперпозиция таких вихрей. Мы не рассматриваем форму поперечного сечения искажённого пучка при дальнейшем распространении в пространстве и сохраняется ли эта форма, но мы показываем, что нормированный на мощность ОУМ в некоторых конкретных случаях сохраняется. Заметим, что при малых углах секторной апертуры начинает проявляться угловой принцип неопределённости одновременного измерения угла диафрагмы и ОУМ прошедшего пуч-

ка, описанный в [10, 11]. В данной работе мы не рассматриваем этот эффект и полагаем, что угол секторной диафрагмы достаточно велик, когда значения этого угла и ОУМ могут быть точно определены.

### 1. Нормированный орбитальный угловой момент суперпозиции двух оптических вихрей после прохождения через секторную диафрагму

Если два радиально симметричных оптических вихря проходят через секторную диафрагму, расположенную в начальной плоскости ( $z=0$ ), то комплексная амплитуда за диафрагмой имеет вид:

$$E(r, \varphi, 0) = [C_1 E_1(r, \varphi, 0) + C_2 E_2(r, \varphi, 0)] \text{rect}\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right), \quad (1)$$

где  $(r, \varphi)$  – полярные координаты в начальной плоскости,  $C_1$  и  $C_2$  – коэффициенты суперпозиции,  $\text{rect}()$  – апертурная функция [ $\text{rect}(\xi) = 1$  при  $|\xi| \leq 1$  и  $\text{rect}(\xi) = 0$  при  $|\xi| > 1$ ],  $\alpha$  – полуугол секторной диафрагмы,  $E_1(r, \varphi, 0)$  и  $E_2(r, \varphi, 0)$  – комплексные амплитуды двух соосных оптических вихрей с разными топологическими зарядами  $n$  и  $m$ , но с одинаковой мощностью:

$$\begin{aligned} E_1(r, \varphi, 0) &= W_1^{-1/2} A_1(r) \exp(in\varphi), \\ E_2(r, \varphi, 0) &= W_2^{-1/2} A_2(r) \exp(im\varphi), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $W_1$  и  $W_2$  – нормирующие множители, делающие мощности пучков  $E_1$  и  $E_2$  равными:

$$W_{1,2} = 2\pi \int_0^\infty |A_{1,2}(r)|^2 r dr. \quad (3)$$

Получим теперь нормированный на мощность ОУМ пучка (1). Мощность произвольного параксиального пучка равна

$$W = \int_0^\infty \int_{-\alpha}^\alpha |E(r, \varphi, 0)|^2 r d\varphi dr. \quad (4)$$

Подставляя комплексную амплитуду (1), получим:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty \int_{-\alpha}^\alpha [C_1^* W_1^{-1/2} A_1^*(r) e^{-im\varphi} + C_2^* W_2^{-1/2} A_2^*(r) e^{-im\varphi}] \times \\ &\times [C_1 W_1^{-1/2} A_1(r) e^{im\varphi} + C_2 W_2^{-1/2} A_2(r) e^{im\varphi}] r d\varphi dr = \\ &= |C_1|^2 \frac{\alpha}{\pi} + |C_2|^2 \frac{\alpha}{\pi} + \\ &+ \frac{4|C_1 C_2| W_1^{-1/2} W_2^{-1/2}}{n-m} \int_0^\infty |A_1(r) A_2(r)| \chi(r) r dr, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \chi(r) &= \sin[(n-m)\alpha] \times \\ &\times \cos[\arg C_1 - \arg C_2 + \arg A_1(r) - \arg A_2(r)]. \end{aligned} \quad (6)$$

У параксиального пучка поперечные компоненты вектора ОУМ пренебрежимо малы, а продольная компонента  $J_z$  имеет вид [12]:

$$J_z = \text{Im} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E^*(r, \varphi, 0) \frac{\partial}{\partial \varphi} E(r, \varphi, 0) r dr d\varphi. \quad (7)$$

Подставляя комплексную амплитуду (1), получим:

$$\begin{aligned} J_z &= \text{Im} \int_0^\infty \int_{-\alpha}^\alpha E^*(r, \varphi, 0) \frac{\partial}{\partial \varphi} E(r, \varphi, 0) r dr d\varphi = \\ &= \text{Re} \int_0^\infty \int_{-\alpha}^\alpha \left[ \frac{C_1^*}{W_1^{1/2}} A_1^*(r) e^{-in\varphi} + \frac{C_2^*}{W_2^{1/2}} A_2^*(r) e^{-im\varphi} \right] \times \\ &\times \left[ n \frac{C_1}{W_1^{1/2}} A_1(r) e^{in\varphi} + m \frac{C_2}{W_2^{1/2}} A_2(r) e^{im\varphi} \right] r dr d\varphi = \quad (8) \\ &= n |C_1|^2 \frac{\alpha}{\pi} + m |C_2|^2 \frac{\alpha}{\pi} + \\ &+ 2 \frac{n+m}{n-m} \frac{|C_1 C_2|}{W_1^{1/2} W_2^{1/2}} \int_0^\infty |A_1(r) A_2(r)| \chi(r) r dr. \end{aligned}$$

Разделив ОУМ пучка (1) на его мощность, получим нормированный на мощность ОУМ:

$$\begin{aligned} \frac{J_z}{W} &= \left[ n |C_1|^2 \frac{\alpha}{\pi} + m |C_2|^2 \frac{\alpha}{\pi} + \right. \\ &+ 2 \frac{n+m}{n-m} \frac{|C_1 C_2|}{\sqrt{W_1 W_2}} \int_0^\infty |A_1(r) A_2(r)| \chi(r) r dr \left. \right] \times \\ &\times \left[ |C_1|^2 \frac{\alpha}{\pi} + |C_2|^2 \frac{\alpha}{\pi} + \right. \\ &+ \left. \frac{4}{n-m} \frac{|C_1 C_2|}{\sqrt{W_1 W_2}} \int_0^\infty |A_1(r) A_2(r)| \chi(r) r dr \right]^{-1}. \quad (9) \end{aligned}$$

Из (6) и (9) видно, что в отсутствие диафрагмы ( $\alpha = \pi$ ) нормированный ОУМ равен средневзвешенному (по энергии) ОУМ двух пучков:  $J_z/W = (n|C_1|^2 + m|C_2|^2) / (|C_1|^2 + |C_2|^2)$ . Однако в отличие от одиночного радиально-симметричного оптического вихря, у суперпозиции вихрей плотность ОУМ (подынтегральное выражение в (7)) распределена в поперечном сечении неравномерно. Поэтому в общем случае секторная диафрагма оставляет в прошедшем через неё пучке область повышенной или пониженной плотности ОУМ. Именно поэтому ОУМ прошедшего пучка отличается от ОУМ падающего пучка.

Выражение (9) громоздко, но оно существенно упрощается в некоторых частных случаях.

### 2. Суперпозиция двух вихревых пучков одинаковой мощности

Если два освещающих вихревых пучка имеют равную мощность, то есть если коэффициенты суперпозиции равны по модулю ( $|C_1| = |C_2|$ ), то выражение (9) сводится к среднему арифметическому топологических зарядов:

$$J_z / W = (n + m) / 2. \quad (10)$$

Например, на рис. 1 показана усечённая и неусечённая суперпозиция двух однокольцевых пучков Лагерра–Гаусса с равной энергией, то есть поле со следующей комплексной амплитудой:

$$\begin{aligned} E(r, \varphi, z = 0) &= \frac{C_1}{\sqrt{W_n}} \left( \frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^n \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2} + in\varphi\right) + \\ &+ \frac{C_2}{\sqrt{W_m}} \left( \frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^m \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2} + im\varphi\right), \quad (11) \end{aligned}$$

где

$$W_n = \frac{\pi w_0^2}{2} n!, \quad W_m = \frac{\pi w_0^2}{2} m!. \quad (12)$$

При расчёте использовались следующие значения параметров: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки  $w_0 = 0,5$  мм, топологические заряды  $n = 5$  и  $m = 2$ , полуугол секторной диафрагмы  $\alpha = \pi$  (первый ряд),  $\alpha = \pi/6$  (второй ряд) и  $\alpha = \pi/18$  (третий ряд), коэффициенты суперпозиции  $C_1 = C_2 = 1$  (первый и второй столбцы) и  $C_1 = 1, C_2 = i$  (третий и четвёртый столбцы), расчётная область  $|x|, |y| \leq R$  ( $R = 2,5$  мм).

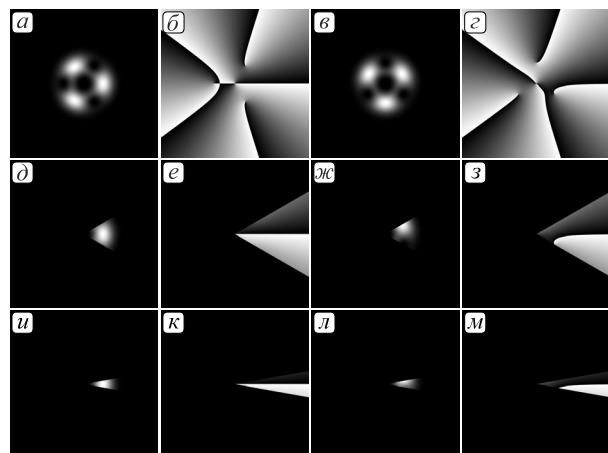


Рис. 1. Распределения интенсивности (1-й и 3-й столбцы) и фазы (2-й и 4-й столбцы) двух разных суперпозиций двух однокольцевых пучков Лагерра–Гаусса равной мощности после прохождения через секторную диафрагму с разным углом

Вычисление с помощью общих выражений (4) и (7) даёт следующие значения нормированного ОУМ: 3,499 (рис. 1а–г), 3,493 (рис. 1д, е), 3,491 (рис. 1ж, з), 3,492 (рис. 1и–м), то есть во всех случаях  $J_z/W \approx 3,5$ . Эти значения согласуются с формулой (10). Таким образом, расчёт подтверждает, что если мощности обоих пучков равны, то секторная диафрагма не может изменить нормированный ОУМ такой суперпозиции, независимо от её угла.

Это явление можно приближённо объяснить путём разложения пучков в ОУМ-спектр. Функцию пропускания секторной диафрагмы можно разложить в симметричный ряд по угловым гармоникам:

$$\text{rect}\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha p}{\pi p} e^{ip\varphi}. \quad (13)$$

Поэтому, если одиночный оптический вихрь проходит через секторную диафрагму, он становится суперпозицией бесконечного числа оптических вихрей всевозможных целых порядков. Если диафрагма освещается двумя оптическими вихревыми пучками, их ОУМ-спектры взаимодействуют и в случае равенства мощностей обоих пучков суммарный ОУМ-спектр остаётся симметричным (рис. 2а). Если же мощности пучков различны, суммарный ОУМ-спектр в общем случае асимметричен (рис. 2б). Если ОУМ-спектр симметричный, ОУМ такого поля равен среднему топологическому заряду в таком спектре [13], то есть  $(m + n) / 2$ .

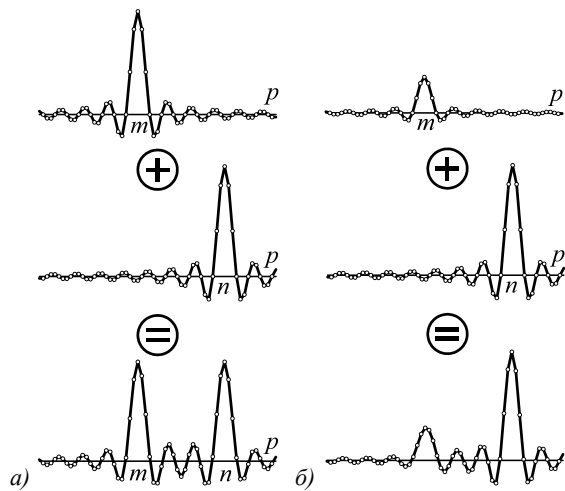


Рис. 2. ОУМ-спектр двух оптических вихревых пучков, прошедших через секторную диафрагму, когда мощности пучков равны (а) и различны (б)

### 3. Суперпозиция двух вихревых пучков разной мощности

#### 3.1. Сохранение ОУМ двух пучков за счёт выбора угла секторной диафрагмы

Если два составляющих вихревых пучка суперпозиции (1) имеют разные мощности, то есть если коэффициенты суперпозиции не равны по модулю ( $|C_1| \neq |C_2|$ ), то нормированный ОУМ исходного (не усечённого) пучка (то есть  $\alpha = \pi$ ) равен

$$J_z / W = (n|C_1|^2 + m|C_2|^2) / (|C_1|^2 + |C_2|^2). \quad (14)$$

В общем случае секторная диафрагма нарушает нормированный ОУМ пучка (1). Здесь мы определим некоторые частные случаи, когда ОУМ не меняется, несмотря на диафрагму. Например, ОУМ (9) сохраняется при усечении пучка, если функция  $\chi(r)$  из (6) равна нулю. Этому можно добиться, выбрав следующий полуугол секторной диафрагмы  $\alpha$ :

$$\alpha = \pi r / (n - m), \quad (15)$$

где  $p$  – произвольное целое число.

Например, на рис. 3 показаны две неусечённые и усечённые суперпозиции двух однокольцевых пучков Лагерра–Гаусса с разной мощностью, то есть пучок (11) с разными значениями  $|C_1|$  и  $|C_2|$ . При расчёте использовались следующие значения параметров: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки  $w_0 = 0,5$  мм, топологические заряды  $n = 5$  и  $m = 2$ , полуугол секторной диафрагмы  $\alpha = \pi$  (рис. 3а–г),  $\alpha = \pi/9$  (рис. 3д–з),  $\alpha = \pi/18$  (рис. 3и–м) и  $\alpha = \pi/3$  (рис. 3н–р), коэффициенты суперпозиции  $C_1 = 2^{1/2}$ ,  $C_2 = 1$  (рис. 3, 1-й и 2-й столбцы) и  $C_2 = -1$  (рис. 3, 3-й и 4-й столбцы), расчётная область  $|x|, |y| \leq R$  ( $R = 2,5$  мм). Тёмные пятна на рис. 3ж, л кажутся меньше, чем на рис. 3в, н, но это только потому, что изображения нормированы на максимальную интенсивность.

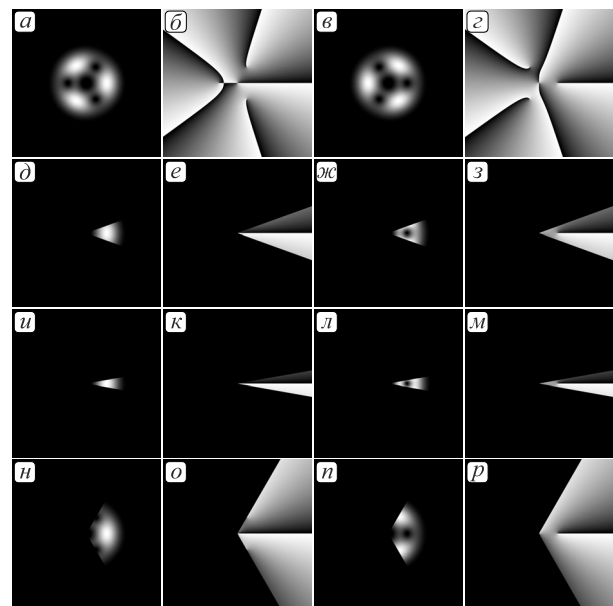


Рис. 3. Распределения интенсивности (1-й и 3-й столбцы) и фазы (2-й и 4-й столбцы) суперпозиций двух однокольцевых пучков Лагерра–Гаусса разной мощности после прохождения через секторные диафрагмы с разными углами

Согласно (14), теоретическое значение ОУМ неусечённого пучка равно  $J_z / W = (5 \times 2 + 2 \times 1) / (2 + 1) = 4$ . Вычисление по формулам (4) и (7) даёт следующие значения нормированного ОУМ: 3,999 (рис. 3а–г), 3,801 (рис. 3д, е), 4,682 (рис. 3ж, з), 3,764 (рис. 3и, к), 4,999 (рис. 3л, м), 3,998 (рис. 3н, о), 3,992 (рис. 3п, р).

Это подтверждает, что диафрагма изменяет ОУМ (хотя и не на большие значения), но при  $\alpha = \pi/3$  [условие (15)] ОУМ сохраняется.

#### 3.2. Обобщение на случай более двух падающих пучков

Правило (15) может быть обобщено на случай, когда в суперпозиции более двух пучков. Если освещающий пучок содержит  $M$  вихрей с топологическими зарядами  $m_s$  ( $s = 1, \dots, M$ ), то за диафрагмой его комплексная амплитуда имеет вид:

$$E(r, \varphi, 0) = \sum_{s=1}^M \frac{C_s}{\sqrt{W_s}} A_s(r) \exp(im_s \varphi) \cdot \text{rect}\left(\frac{\varphi}{\alpha}\right), \quad (16)$$

где  $C_s$  – коэффициенты суперпозиции, а  $W_s$  – нормирующие множители:

$$W_s = 2\pi \int_0^\infty |A_s(r)|^2 r dr. \quad (17)$$

Получение нормированного ОУМ приводит к выражению, подобному (9), но ещё более громоздкому:

$$\begin{aligned} \frac{J_z}{W} = & \left[ \frac{\alpha}{\pi} \sum_{s=1}^M m_s |C_s|^2 + 2 \sum_{s=2}^M \sum_{q=1}^{s-1} |C_s| |C_q| W_s^{-1/2} W_q^{-1/2} \times \right. \\ & \left. \times \frac{m_q + m_s}{m_q - m_s} \int_0^\infty |A_s(r)| |A_q(r)| \chi_{sq}(r) r dr \right] \times \\ & \times \left[ \frac{\alpha}{\pi} \sum_{s=1}^M |C_s|^2 + \sum_{s=2}^M \sum_{q=1}^{s-1} |C_s| |C_q| W_s^{-1/2} W_q^{-1/2} \times \right. \\ & \left. \times \frac{4}{m_q - m_s} \int_0^\infty |A_s(r)| |A_q(r)| \chi_{sq}(r) r dr \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_{sq}(r) = & \sin[(m_q - m_s)\alpha] \times \\ & \times \cos[\arg C_q - \arg C_s + \arg A_q(r) - \arg A_s(r)]. \end{aligned} \quad (19)$$

К сожалению, если все пучки имеют одинаковую мощность, то есть  $|C_1| = |C_2| = \dots = |C_M|$ , формула (18) не приводит к среднему топологическому заряду, в отличие от случая двух пучков [выражение (10)]. Однако можно приравнять нулю все функции  $\chi_{sq}(r)$ . Это происходит, когда для любых индексов  $s, q = 1, \dots, M$ , выполняется условие

$$\alpha = \pi p_{qs} / (m_q - m_s), \quad (20)$$

где  $p_{qs}$  – произвольные целые числа.

Поэтому, чтобы ОУМ не изменился, полуугол диафрагмы должен быть равен целому числу, умноженному на  $\pi$  и делённому на наибольший общий делитель всех возможных разностей между топологическими зарядами.

Чтобы это продемонстрировать, на рис. 4 показана неусечённая и усечённая суперпозиция трёх однокольцевых пучков Лагерра–Гаусса. При расчёте использовались следующие значения параметров: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки всех трёх пучков  $w_0 = 0,5$  мм, топологические заряды  $m_1 = 6, m_2 = 9$  и  $m_3 = 12$ , полуугол секторной диафрагмы  $\alpha = \pi$  (рис. 4а, б) и  $\alpha = \pi/3$  (рис. 4в, г), коэффициенты суперпозиции трёх пучков  $C_1 = 3^{1/2}, C_2 = -2^{1/2}, C_3 = 1$ , расчётная область  $|x|, |y| \leq R (R = 2,5$  мм).

Подобно (14), теоретическое значение ОУМ исходного пучка равно:

$$J_z / W = (6 \times 3 + 9 \times 2 + 12 \times 1) / (3 + 2 + 1) = 8.$$

Расчёт даёт следующие значения нормированного ОУМ: 7,999 (рис. 4а, б) и 7,991 (рис. 4в, г). Наибольший общий делитель всех возможных разностей между топологическими зарядами 6, 9, 12 равен 3, и, действительно, ОУМ не изменился при полуугле диафрагмы  $\pi/3$ .

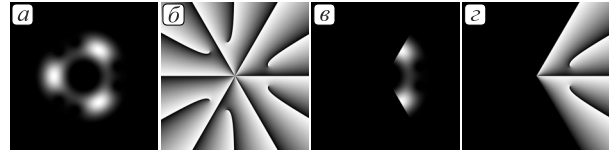


Рис. 4. Распределения интенсивности (а, в) и фазы (б, г) суперпозиции трёх однокольцевых пучков Лагерра–Гаусса с разной мощностью, неусечённой (а, б) и усечённой (в, г) секторной диафрагмой с углом (20)

При других же углах секторной диафрагмы нормированный ОУМ меняется, и особенно существенно при небольших углах. На рис. 5 показана зависимость ОУМ пучка с рис. 4 от угла диафрагмы. Из рис. 5 видно, что значение ОУМ, равное 8, достигается как раз при углах  $\alpha = \pi/3, 2\pi/3, \pi$ .

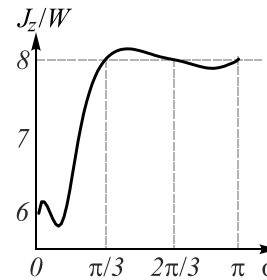


Рис. 5. Зависимость нормированного ОУМ пучка с рис. 4 от угла секторной диафрагмы

### 3.3. Сохранение ОУМ суперпозиции двух пучков при разности фаз $\pm \pi/2$ между ними

Ещё один случай сохранения ОУМ возникает, когда два пучка имеют между собой разность фаз  $\pm \pi/2$  ( $|\arg C_1 - \arg C_2| = \pi/2$ ) и когда функции  $A_1(r)$  и  $A_2(r)$  вещественны. Эти функции вещественны, например, для пучков Лагерра–Гаусса [14] и Бесселя–Гаусса [15], но не для гипергеометрических Гауссовых пучков [16, 17], поскольку их Гауссова составляющая вещественна, но вырожденная гипергеометрическая функция [18] комплексна.

Например, из рис. 3 видно, что секторная диафрагма с малым углом может существенно изменить нормированный ОУМ (рис. 3и–м). На рис. 6 показаны две аналогичные суперпозиции двух пучков Лагерра–Гаусса, но с разностью фаз  $\pm \pi/2$  между ними. При расчёте использовались следующие значения параметров: длина волны  $\lambda = 532$  нм, радиус перетяжки  $w_0 = 0,5$  мм, топологические заряды  $n = 5$  и  $m = 2$ , полуугол секторной диафрагмы  $\alpha = \pi$  (рис. 6а–г),  $\alpha = \pi/9$  (рис. 6д–з),  $\alpha = \pi/18$  (рис. 6и–м), коэффициенты суперпозиции  $C_1 = 2^{1/2}, C_2 = i$  (рис. 6, 1-й и 2-й столбцы) и  $C_2 = -i$  (рис. 6, 3-й и 4-й столбцы), расчётная область  $|x|, |y| \leq R (R = 2,5$  мм).

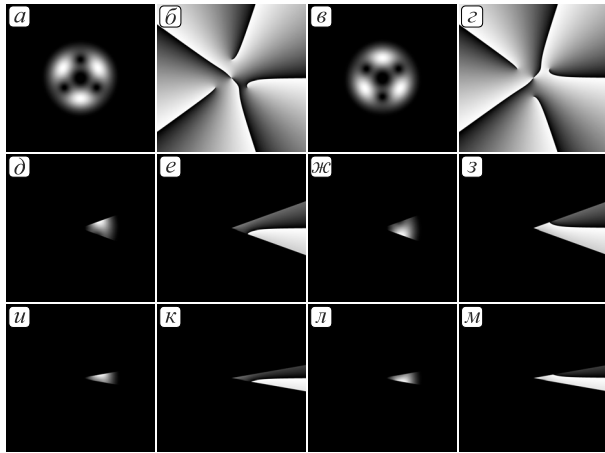


Рис. 6. Распределения интенсивности (1-й и 3-й столбцы) и фазы (2-й и 4-й столбцы) двух разных суперпозиций двух однокольцевых пучков Лагерра–Гаусса с разной мощностью и задержкой фаз  $\pm\pi/2$ , прошедших через секторные диафрагмы с разными углами

Видно, что неусечённый пучок (рис. 6а, в) имеет точно такое же распределение интенсивности, что и на рис. 3а, в, но повернутое на прямой угол. Однако, в отличие от рис. 3д–м, теория предсказывает, что секторная диафрагма не должна нарушить нормированный ОУМ, который должен остаться равным 4. Вычисление с помощью общих выражений (4) и (7) даёт следующие значения нормированного ОУМ: 3,999 (рис. 6а–г), 3,992 (рис. 6д–з), 3,982 (рис. 6и–м), то есть все значения близки к 4. Это подтверждает, что разность фаз  $\pm\pi/2$  между пучками позволяет сохранить нормированный ОУМ суперпозиции.

#### 4. Нормированный орбитальный угловой момент суперпозиции двух вихревых пучков после прохождения через бинарную радиальную решётку

Радиальная решётка – симметричный оптический элемент с функцией пропускания, периодичной по азимутальной полярной координате (период меньше  $2\pi$ ). Например, амплитудные синусоидальные радиальные решётки могут применяться для измерения топологического заряда вихревых пучков [19]. Также недавно их предложено использовать для формирования субдифракционных пучков Бесселя [20]. Фазовая бинарная радиальная решётка имеет функцию пропускания вида:

$$T(r, \varphi) = \text{sgn} \cos(p\varphi) \text{rect}\left(\frac{r}{R}\right), \quad (21)$$

где  $R$  – радиус решётки,  $p$  – целое число, определяющее азимутальный период. Такая решётка может рассматриваться как набор секторных диафрагм, и потому вышеизложенная теория может быть применена для анализа нормированного ОУМ пучков, проходящих через бинарную радиальную решётку.

Согласно (10), если два соосных вихревых пучка имеют равную мощность, то после прохождения че-

рез бинарную радиальную решётку ОУМ суперпозиции должен сохраниться.

На рис. 7 показаны интенсивность и фаза пучка с рис. 1а, б, прошедшего через две фазовые бинарные радиальные решётки, одну с  $p=8$  и другую с  $p=17$ . Расчёт даёт следующие значения нормированного ОУМ: 3,487 (рис. 7а, б), 3,472 (рис. 7а, в), то есть значения, близкие к теоретическому значению 3,5.

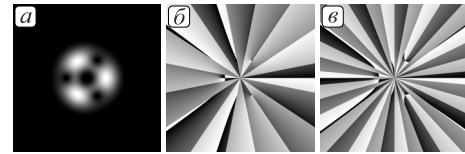


Рис. 7. Распределения интенсивности (а) и фазы (б, в) суперпозиции двух однокольцевых пучков Лагерра–Гаусса равной мощности (с рис. 1а, б), прошедшей через две разные бинарные радиальные решётки

#### 5. Топологический заряд суперпозиции оптических вихрей после прохождения через секторную диафрагму

Заметим, что в силу своей дискретности топологический заряд является характеристикой световых полей, в общем случае более устойчивой к искажениям. Однако секторное искажение способно существенно исказить топологический заряд. Влияние секторной диафрагмы на топологический заряд одиночного вихря рассматривалось в [21, 22], но в этих работах предполагалось либо слабое пропускание вне диафрагмы, либо небольшое смещение угла сектора от точки фазовой сингулярности (центра вихря).

В случае слабого пропускания  $\delta$  ( $\delta \ll 1$ ) прохождение через диафрагму описывается следующей функцией:

$$f(\varphi) = \begin{cases} 1, & -\alpha < \varphi < \alpha, \\ \delta, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (22)$$

В [21,22] доказано, что топологический заряд такой диафрагмой не искажается. Действительно, согласно [23], топологический заряд произвольного поля с комплексной амплитудой  $E(r, \varphi)$  (в полярных координатах) равен

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\arg E(r, \varphi)] d\varphi. \quad (23)$$

Очевидно, умножение комплексной амплитуды на любую ненулевую функцию, в том числе функцию (22), не изменяет топологический заряд. Конкретное его значение в нашем случае зависит от видов световых полей (2). Так, общий заряд у суперпозиции однокольцевых пучков Лагерра–Гаусса равен их максимальному заряду, а общий заряд у суперпозиции мод Бесселя не определён и зависит от выбранного радиуса окружности, по которой он вычисляется.

Для случая небольшого смещения угла сектора от точки фазовой сингулярности топологический заряд

одиночного вихря в [22] зависел от того, остаётся ли вихрь в области диафрагмы. В случае суперпозиции нескольких пучков у падающего светового поля в центре имеется вихрь, порядок которого равен минимальному топологическому заряду пучков в суперпозиции. Кроме того, имеется множество внеосевых вихрей, которые могут попасть в область диафрагмы или блокироваться ею. Поэтому, если не полагать слабое пропускание вне диафрагмы, топологический заряд для каждого конкретного поля вида (2) надо определять индивидуально.

### Заключение

Когда два или более соосных оптических вихревых пучка проходят через секторную диафрагму, нормированный ОУМ всей суперпозиции в общем случае изменяется. Это объясняется неравномерным распределением плотности ОУМ в поперечном сечении, вследствие чего секторная диафрагма пропускает часть пучка с повышенной или пониженной плотностью. Однако обнаружено несколько случаев, когда этот ОУМ сохраняется. Так, это происходит, когда оба пучка имеют одинаковую мощность. Если пучки имеют разную мощность, ОУМ тоже сохраняется, если полуугол апертуры имеет определённое значение, равное целому числу, умноженному на  $\pi$  и делённому на разность топологических зарядов. Для более чем двух падающих пучков этот угол равен целому числу, умноженному на  $\pi$  и делённому на наибольший общий делитель всех возможных разностей топологических зарядов. Если радиальные составляющие комплексных амплитуд двух вихревых пучков вещественны, то ОУМ сохраняется при разности фаз между пучками  $\pm\pi/2$ . Когда два вихревых пучка с одинаковой мощностью проходят через бинарную радиальную решётку, их суммарный ОУМ также сохраняется.

### Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 18-19-00595, параграфы «Нормированный орбитальный угловой момент суперпозиции двух оптических вихрей после прохождения через секторную диафрагму» и «Суперпозиция двух вихревых пучков с одинаковой мощности»), Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (параграф «Суперпозиция двух вихревых пучков разной мощности»), а также за счет предоставления гранта Самарскому университету на реализацию программы стратегического академического лидерства «Приоритет-2030» (параграф «Нормированный орбитальный угловой момент суперпозиции двух вихревых пучков после прохождения через бинарную радиальную решётку»).

### References

- [1] Bouchal Z, Wagner J, Chlup M. Self-reconstruction of a distorted nondiffracting beam. *Opt Commun* 1998; 151(4-6): 207-211.
- [2] Pinnell J, Rodríguez-Fajardo V, Forbes A, Chabou S, Mihoubi K, Bencheikh A. Revealing the modal content of obstructed beams. *Phys Rev A* 2020; 102(3): 033524.
- [3] Arrizon V, Mellado-Villaseñor G, Aguirre-Olivas D, Moya-Cessa H. Mathematical and diffractive modeling of self-healing. *Opt Express* 2018; 26: 12219-12229.
- [4] Zambale N, Doblado G, Hermosa N. OAM beams from incomplete computer generated holograms projected onto a DMD. *J Opt Soc Am B* 2017; 34: 1905-1911.
- [5] Zhang Y, Chen MLN, Jiang L. Extraction of the characteristics of vortex beams with a partial receiving aperture at arbitrary locations. *J Opt* 2021; 23(8): 085601.
- [6] Zheng S, Hui X, Zhu J, Chi H, Jin X, Yu S, Zhang X. Orbital angular momentum mode-demultiplexing scheme with partial angular receiving aperture. *Opt Express* 2015; 23: 12251-12257.
- [7] Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Orbital angular momentum and informational entropy in perturbed vortex beams. *Opt Lett* 2019; 44: 5687-5690.
- [8] Volyar A, Akimova Y. Structural stability of spiral vortex beams to sector perturbations. *Appl Opt* 2021; 60: 8865-8874.
- [9] Socratovich B. Fresnel diffraction from sector apertures. *Opt Express* 2021; 29: 30419-30425.
- [10] Franke-Arnold S, Barnett SM, Yao E, Leach J, Courtial J, Padgett M. Uncertainty principle for angular position and angular momentum. *New J Phys* 2004; 6: 103.
- [11] Yao E, Franke-Arnold S, Courtial J, Barnett S, Padgett M. Fourier relationship between angular position and optical orbital angular momentum. *Opt Express* 2006; 14(20): 9071-9076.
- [12] Berry MV, Jeffrey MR, Mansuripur M. Orbital and spin angular momentum in conical diffraction. *J Opt A: Pure Appl Opt* 2005; 7: 685-690.
- [13] Kotlyar VV, Kovalev AA. Optical vortex beams with a symmetric and almost symmetric OAM spectrum. *J Opt Soc Am A* 2021; 38(9): 1276-1283. DOI: 10.1364/JOSAA.432623.
- [14] Siegman AE. *Lasers*. Mill Valley, CA: University Science Books; 1986.
- [15] Gori F, Guattari G, Padovani C. Bessel-Gauss beams. *Opt Commun* 1987; 64(6): 491-495.
- [16] Kotlyar VV, Skidanov RV, Khonina SN, Soifer VA. Hypergeometric modes. *Opt Lett* 2007; 32(7): 742-744. DOI: 10.1364/OL.32.000742.
- [17] Karimi E, Zito G, Piccirillo B, Marrucci L, Santamato E. Hypergeometric-Gaussian modes. *Opt Lett* 2007; 32: 3053-3055.
- [18] Abramowitz M, Stegun IA. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. New York: Dover Publications Inc; 1970.
- [19] Hebri D, Rasouli S, Yeganeh M. Intensity-based measuring of the topological charge alteration by the diffraction of vortex beams from amplitude sinusoidal radial gratings. *J Opt Soc Am B* 2018; 35(4): 724-730.
- [20] Wang W, Liu D, Gu M, Han P, Xiao M. Generation of a sub-diffracted Bessel beam via diffraction interference in a combined amplitude structure. *Opt Express* 2021; 29: 597-603.
- [21] Kotlyar VV, Kovalev AA, Volyar AV. Topological charge of optical vortices and their superpositions. *Computer Optics* 2020; 44(2): 145-154. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-685.

[22] Kotlyar VV, Kovalev AA, Volyar AV. Topological charge of a linear combination of optical vortices: topological competition. Opt Express 2020; 28(6): 8266-8281. DOI: 10.1364/OE.386401.

[23] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. J Opt A: Pure Appl Opt 2004; 6(2): 259-268.

---

***Сведения об авторах***

Сведения об авторе **Ковалёв Алексей Андреевич** – см. стр.188 этого номера.

---

*ГРНТИ: 29.31.15*

*Поступила в редакцию 18 ноября 2021 г. Окончательный вариант – 13 января 2022 г.*

---



---

# Orbital angular momentum of superpositions of optical vortices after passing through a sector diaphragm

A.A. Kovalev<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> *IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS,  
443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151,*

<sup>2</sup> *Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34*

## Abstract

In optical communications, it is desirable to know some quantities describing a light field, that are conserved on propagation or resistant to some distortions. Typically, optical vortex beams are characterized by their orbital angular momentum (OAM) and/or topological charge (TC). Here, we study what happens with the OAM of a superposition of two or several optical vortices (with different TCs) when it is distorted by a hard-edge sector aperture. We discover several cases when such perturbation does not violate the OAM of the whole superposition. The first case is when the incident beam consists of two vortices of the same power. The second case is when the aperture half-angle equals an integer number of  $\pi$  divided by the difference between the topological charges. For more than two incident beams, this angle equals an integer number of  $\pi$  divided by the greatest common divisor of all possible differences between the topological charges. For two incident vortex beams with real-valued radial envelopes of the complex amplitudes, the OAM is also conserved when there is a  $\pm\pi/2$  phase delay between the beams. When two beams with the same power pass through a binary radial grating, their total OAM is also conserved.

*Keywords:* sector aperture, orbital angular momentum, optical vortex, superposition.

*Citation:* Kovalev AA. Orbital angular momentum of superpositions of optical vortices after passing through a sector diaphragm. *Computer Optics* 2022; 46(2): 196-203. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1072.

*Acknowledgements:* This work was supported by the Russian Science Foundation under Project No. 18-19-00595 (Sections “Normalized orbital angular momentum of a superposition of two optical vortices after passing through a sector diaphragm” and “Superposition of two vortex beams with equal power”), the RF Ministry of Science and Higher Education under a government project of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS (Section “Superposition of two vortex beams with different power”), and the grant for Samara University within the federal academic leadership program “Priority 2030” (Section “Normalized orbital angular momentum of a superposition of two optical vortices after passing through a binary radial grating”).

---

## Author’s information

**Alexey Andreevich Kovalev** (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at the IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 200 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices. E-mail: [alanko@ipsiras.ru](mailto:alanko@ipsiras.ru).

---

*Received November 18, 2021. The final version – January 13, 2022.*

---